板情報に着目した市場モデル：進化ゲーム理論*

Market Model Focused On the Order Book

吉川 満†
Mitsuru Kikkawa

明治大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
Department of Science and Technology, Meiji University

Abstract: This research constructs the financial market model and analyzes the real market with evolutionary game theory. Especially, this research focuses on the order book in the financial market. This research is based on Kikkawa [7], extends that each player has a risk attitude and analyzes the order book with Micro-Econometrics's methods. We derive Nash equilibrium from this regression method and we present the method to forecast the next step.

1 はじめに

本稿は市場, 特に金融市場をゲーム理論を用いて, 各主体の行動から理論を構築しようとするものである. 今まで経済学では, 多くの市場に関する研究がされてきた. 例えば一般均衡理論や数理ファイナンスによる研究が挙げられる. また最近ではゲーム理論を用いた市場を研究したものも存在する. しかしこれらの多くは最適な状態を調べる規範的な研究が多い. そこで本研究では進化ゲーム理論を用いて, 市場の板情報に着目し, 市場を記述する.

本稿では吉川 [7] を基礎として, 各主体にリスクに対する態度がある場合の理論分析やミクロ計量経済学の手法を用いて, 板情報を実証分析する. よってリスクに対する態度がどのように市場に影響を与えるのか, ミクロ計量経済学の手法を用いることにより, 各主体はどのように戦略を提示しているのかを考察する.

この論文は次のように構成されている. 第 2 節では, モデルを定式化し, 戦略の数が 2 つの場合を取り上げる. またここで定式化したモデルを実際の市場の分析に使用し, 各期の市場の状態を分析する. 第 3 節では, 基本モデルを拡張し, 主体がリスクに対する態度がある場合を考察する. 第 4 節では, 板情報を実証分析し, 約定価格を予測する新たな手法を提案する. 第 5 節では, 結論と今後の課題等を述べる.

*本研究の一部は, 平成 20 年度採択, 文部科学省 グローバル COE プログラム「現象数理学の形成と発展」現象数理若手プロジェクト「人間特有の現象に対する学習の影響 - 進化ゲーム理論による分析 -」に関する研究拠点形成費の助成を受けて行われた. また本稿は「進化経済学論集」に投稿した論文の内容を基礎として, 加筆, 訂正したものである.

†連絡先：明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
〒 214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1
E-mail: mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

2 モデル

この節では吉川 [7] を基礎として, 市場のモデルを構築する. ここでは潜在的に, 大人数の主体がおり, 2 つのグループがあるとする[1]. ここでは売り手と買い手を想定している. ある期にそれぞれのグループからランダムに 1 人づつ選ばれ, 選ばれた主体同士がゲーム, 売買を行うとする. また各主体は $n(< \infty)$ 個の戦略を持っているとする.

本稿では証券市場を想定しているので, 例えば表 1 のような板情報の下で, 1 つの財の売買を行っていると考える. よってここで各主体の戦略とは, ある財 (株など) をいくらで, 買う, 売るのかという価格を表している. このような板情報に基づいて, 取引所が約定値段を決め, 売買契約を締結させる. ただしこのモデルでは 1 単位の財の売買のみを考察しており, ダブルオークションのような数量まで考察することはできない. そのため数量は多くの人がその価格で売買するということで表現している.

ここでの各主体の利得は締結した売買契約をもとに, 各主体の利得が定まる. 特にこのゲームはゼロ=サム型の利得構造をしている. 株価・指数は時間とともに変化している.[2] そのため t 期の各主体の利得はそれぞれ $S(t) - K$, $K - S(t)$ となる. ただしここで K は行使価格を表している.

このことは主に進化ゲーム理論で使用される次のような Replicator 方程式を用いて, 表現することができる. 利得 g_i の値が株価・指数の不規則な変動によって,

[1] 進化ゲーム理論の文脈では非対称 2 人ゲームのことを示している.

[2] 株価・指数を幾何 Brown 運動していると仮定すると, 数理ファイナンスで研究されている設定と変わらない. その場合数理ファイナンスの研究にミクロ的基礎付けを持たせた場合として位置付けることが可能となる. [5]

(売呼値)	銘柄 (値段)	(買呼値)
2 4 H I	成行呼値	1 3 KM
◯ ◯ ◯	503 円	
◯ ◯ ◯	502 円	1 T
◯ ◯	501 円	5 2 P N
1 1 1 G F E	500 円	4 3 2 1 A B C D
2 S	499 円	◯ ◯ ◯
4 R	498 円	◯ ◯ ◯
	497 円	◯ ◯ ◯

表 1: 板情報の例 (東京証券取引所のホームページより)
(注) 1. アルファベットは取引参加者記号の代用. 2. アルファベットの上の数字は株数で, 単元は 1 単元の株式数 1000 株とする. 3. ◯ 印は呼値の取引参加者記号及び株数を省略. 4. 始値が決定するまでの呼値については, すべて同時に行われたものとみなす.

その平均値 $\bar{g}$ の近傍で時間的にランダムな変化をするものとする. つまり次の方程式系を考えることになる.

$$\text{(2.1a)} \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\big(g_i(t) - \bar{g}(t)\big),$$
$$\text{(2.1b)} \quad \frac{dy_i(t)}{dt} = y_i(t)\big(h_i(t) - \bar{h}(t)\big),$$

ただしここで x_i とは 戦略 i を採用する確率とする.

この方程式系 (2.1) の定性的な性質は一般には分からない.[3)]

2.1 例：戦略の数が 2 つ

そこでここでは買い手と売り手のそれぞれの戦略は行使価格とし, {bear, bull} などの 2 つの { 戦略 1, 戦略 2} があるとし, 毎期独立に戦略を選択するとする.[4)] 特にここでは前期の市場を参考に, 今期の戦略, 行使価格を決定する. 例えば前期が約定値段が上昇した場合は, 今期も約定値段が上昇する (買い手の場合, bear), あるいは下落する (買い手の場合, bull) など決定するとする.

このゲームは次の利得表のように, ゼロ＝サム型のゲーム構造をしている. ただしここでの利得 $g_i(t) = a(t), b(t)$ とする.

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$a(t), -a(t)$	$0, 0$
戦略 2	$0, 0$	$b(t), -b(t)$

利得表 1

このときの Replicator 方程式は次のようである.

$$\text{(2.2a)} \quad \dot{x} = x(1-x)\big\{-b(t) + \big(a(t)+b(t)\big)y\big\},$$
$$\text{(2.2b)} \quad \dot{y} = y(1-y)\big\{b(t) - \big(a(t)+b(t)\big)x\big\},$$

ただし x を主体 I が戦略 1 を採用する確率とし, y を主体 II が戦略 1 を採用する確率とする. また (2.2) の両辺を $xy(1-x)(1-y)$ で割り, 離散化すると, 次を得る.

$$\text{(2.3a)} \quad x(t+\varepsilon) = x(t) - \Big(\frac{b(t)}{y(t)} + \frac{a(t)}{1-y(t)}\Big)\varepsilon,$$
$$\text{(2.3b)} \quad y(t+\varepsilon) = y(t) + \Big(\frac{b(t)}{x(t)} - \frac{a(t)}{1-x(t)}\Big)\varepsilon.$$

この式を用いることによって, 1 期先の戦略のシェア x, y の値を知ることができる.

次節で実際の市場を分析する前に, 市場のモデルの利得表を定義すると, 次の 3 つに分類することができる. ここでは市場の動態, 変化を主眼に調べているので, t 期の約定値段が $t-1$ 期のものに比べて, (i) 変わらない, (ii) 上がる, (iii) 下がる場合の 3 つの場合しかない.

ここで利得表中の利得は符号で表している. また買い手が戦略 1 を採用する場合は, bull(強気) で安い価格を提示, 戦略 2 の場合は bear(弱気) で高い価格を提示すると解釈する. 売り手の場合も同様に戦略 1 を採用する場合は, bear(弱気) で安い価格を提示, 戦略 2 の場合は bull(強気) で高い価格を提示すると解釈する.

(i) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**変化しない**場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+, -$	0,0
戦略 2	0,0	$-, +$

利得表 2-1

このときの利得表は約定値段が変化しない時において, 買い手と売り手が共に戦略 1 を採用した場合は, 約定値段よりも安い価格で取引ができたので, 買い手に有利な利得となる. 逆に売り手の場合は不利な取引となったため, 負の利得を得ることになる. また買い手と売り手の価格が合致しない場合, 例えば買い手が戦略 1 を採用し, 売り手が戦略 2 を採用した場合は, 約定が成立されないために各主体の利得は 0 となる. またこのゲームの Nash 均衡は (買い手の戦略, 売り手の戦略)=

3) 対称 2 人ゲームの場合, 主体の戦略の分布は対数正規性に従う.(Kikkawa [6] の命題 3)

4) 実際の市場では, 各主体の戦略の数はせいぜい 5 つ程度である. また 1 分や数十秒程度の超短期的な市場の場合で考えると, 3 つ程度 (bear 的, bull 的, 均衡価格と同じ戦略) で構わない.

(戦略 1, 戦略 2) である.

(ii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**上昇**する場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,-$	0,0
戦略 2	0,0	0,0

利得表 2-2

このときの利得表は買い手が戦略 1 の安い価格を提示し, 売り手も戦略 1 の安い価格を提示すると, 約定が成立し, 買い手が正の利得を得, 売り手が負の利得を得る. 買い手, 売り手共に戦略 2 を提示の場合約定が成立するが, 期待と同じ価格となっており, 共に利得を得ないために, 0 とした. また戦略が一致しない場合は上述と同じである. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 2), (戦略 2, 戦略 2) であり, 特に (戦略 2, 戦略 2) は**完全均衡点**(perfect equilibrium) である.

(iii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**下落**する場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	0,0	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 2-3

このときの利得表は利得表 2-2 の戦略 1 を戦略 2, 戦略 2 を戦略 1 に置き換えれば, 同じ論理である. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 1), (戦略 1, 戦略 2) であり, 特に (戦略 1, 戦略 1) は完全均衡点である.

以上の結果, 利得表 2-1,2,3 に共通するのは, Nash 均衡として, (買い手の戦略, 売り手の戦略)=(戦略 1, 戦略 2) が存在することである. つまり買い手は安い価格を提示 (bear) し, 売り手は高い価格 (bull) を提示するという戦略が約定値段がどのように変化しようとも, 常にこの戦略が提示されるということが分かる. 実際 (2.3) からも, Brown 運動的に刻々と利得が変化する場合を考えても, 常に $x \to 1, y \to 0$ (買い手は戦略 1(bear), 売り手は戦略 2(bear)) となることが分かる. つまり買い手や売り手は自分に有利な行動を採用する傾向があるということが分かる. この結果をそのまま適用すると, 約定が成立せず, 株価・指数の変動はないということが推測される. しかし実際には株価・指数は上下して変動しているので, この利得表では市場を記述するには不十分であり, 修正が必要だと分かる.

2.2 応用：日経 225 先物市場

上記のモデルでは指数は幾何 Brown 運動していると仮定していたが, 実際の指数は幾何 Brown 運動していないということが観察される. そこでこの節ではある日における 1 分足の日経 225 先物市場における指数の終値データを用いて, 市場の状態を分析する. つまり実際の市場データの値からゲームの状況を分類する.

例えば 2009 年 8 月 26 日, 1 日の日経 225 先物 1 限月における 1 分足の指数の推移は図 1 のようになる.

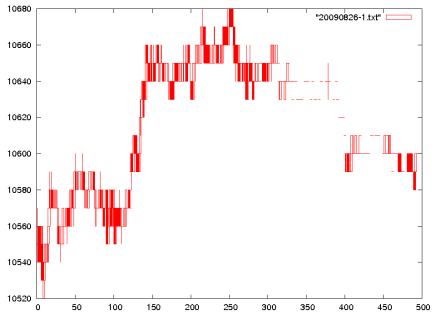

図 1: 2009 年 8 月 26 日, 日経 225 先物 1 限月における 1 分足の指数の推移.

上述した利得表 2 は約定成立においての利得であり, その実現のしやすさまでは考慮に入れていない. 例えば取引において, 約定を成立させるだけであるならば, 現在の値段において, 注文を行えば, この場合は利益は少ないが約定する. しかし戦略的に価格づけた場合予測が当たると, 利得が少し多く得ることができることがある. 上述した利得表 2 はこのようなことを考慮に入れず, 利得の大きさのみに着目した. そのため現実とは異なるような結論が得られた. そこで次のように利得表を変更する.[5)]

(i) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**変化しない**場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$-,+$	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 3-1

この利得表は約定値段が変化しない時において, Nash 均衡が混合戦略となるように利得を変更した. 買い手と売り手が共に戦略 1(2) を採用した場合は, 売り手は約定値段よりも安 (高) い価格で取引ができ, 売る (買う) ことができたと解釈することにより, 正の利得を得る. 逆に買い手はより有利な条件で購入することがで

[5)] 実際各主体がどのような利得表を持ち, ゲームを行っているのかは分からない. そこで利得表から得られる Nash 均衡から定式化する.

きるので, 負の利得を得ると解釈する. また買い手と売り手の戦略が合致しない場合, 例えば買い手が戦略 1 を採用し, 売り手が戦略 2 を採用した場合は, 価格が一致しないため, 約定が成立しないために, 各主体の利得は 0 となる. またこのゲームの Nash 均衡は混合戦略である.

(ii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**上昇**する場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,-$	0,0
戦略 2	0,0	$+,+$

利得表 3-2

この利得表は買い手は戦略 1 の安い価格を提示し, 売り手も戦略 1 の安い価格を提示すると, 約定は成立し, 買い手は正の利得を得, 売り手は負の利得を得る. 買い手, 売り手共に戦略 2 を提示の場合は, 期待通りに約定が成立し, いくらかの買い手, 売り手共に正の利得を得る. また戦略が一致しない場合は上述と同じである. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 2, 戦略 2) のみである. よってこのときは価格は上がりやすいことを示している.

(iii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**下落**する場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,+$	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 3-3

この利得表は利得表 3-2 の戦略 1 を戦略 2, 戦略 2 を戦略 1 に置き換えれば, 同じ論理である. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 1) のみである. よってこのときは価格は下がりやすいことを示している.

ここではこの利得表を実際のデータに当てはめ, Replicator 方程式の軌跡を調べる. 株価・指数 $S(t)$ は 2009 年 7 月 17 日から 8 月 26 日までの日経 225 先物 1 限月の 1 分足の $t-1$ 期に比べて t 期の終値が上昇 (下落), それとも変化しない回数を数えると, 圧倒的に価格が変化しない状態が多い.

図 2 は 2009 年 8 月 26 日のデータにおいて, 値段が上昇した 90 回, 利得表 3-2 を使用し, 逆に値段が下落した 89 回は, 利得表 3-3 を使用し, 値段が変わらない 314 回は利得表 3-1 を使用した場合の Replicator 方程式 (2.3) の軌跡 (実線 (赤)) である.

以上のように短期市場の特性を利用して, 利得表を新たに定式化し, 各主体の最適な行動プロファイルを導出した.

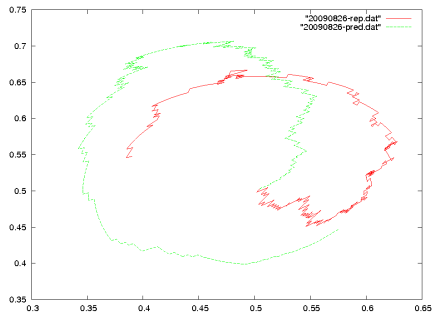

図 2: 2009 年 8 月 26 日のデータを利用し, 実線 (赤) が Replicator 方程式 (2.3) の軌跡, 点線 (緑) は各主体の行動を予測した上で, 最適な行動の軌跡を表している. (x, y の初期値は共に 0.5 とした.)

3 リスクに対する態度

今までは各主体はリスク中立的な主体がいる場合を考えてきた. ここでは各主体にリスクに対する態度がある場合を考える.

進化ゲーム理論において利得関数 g_i は一般的な関数であり, 線形, 非線形と定めていない. そのため古典的な進化ゲーム理論においては, 利得関数は $g(x)=x$ を仮定して議論したと考える. そこで本稿では各主体の利得関数が 1 階, 2 階の Taylor 展開して得られるものを用いて議論する.

ここで $g(x)$ は第 n 階まで微分可能とすると, 利得関数 $g(x+z)$ は次となる.

$$g(x+z)=g(x)+g'(x)z+\frac{1}{2}g''(x)z^2+O(z^3). \tag{3.1}$$

ただしここでは $z\in X$ (X は財の集合) はゲームにおける利得とし, $x\in X$ を現在所有している財の量とする. よって x は現在の資産量を表している. またこのゲームを通して得られる効用は次のようになると分かる.

$$g(x+z)-g(x)=g'(x)z+\frac{1}{2}g''(x)z^2+O(z^3). \tag{3.2}$$

これは次の定義を用いて, 整理すると, 分かりやすくなる.

定義(Arrow [1], Pratt [9]): 利得関数 $u(x)$ は 2 階微分可能であるとする. このとき, x についての Arrow-Pratt の**絶対的リスク回避度**(absolute risk aversion) とは次のことを言う.

$$r_A(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}. \text{ ——}$$

この定義を用いて, 変更すると, $z\Big(1-\frac{z}{2}r_A(x)\Big)>0$

のとき, $g(x+z)-g(x)>0$ となり, 正の利得を得ていると分かる.

このように各主体にリスクに対する態度を持たせると, 先ほどの利得表は次のように変更される. ここでは簡単化のために, 偶然プラスの利得を得られる場合はなくなるとする.

(i) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**変化しない**場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	−, −	0,0
戦略 2	0,0	−, −

利得表 4-1

(ii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**上昇**する場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	−, −	0,0
戦略 2	0,0	+,+

利得表 4-2

(iii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**下落**する場合:

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	+,+	0,0
戦略 2	0,0	−, −

利得表 4-3

このような利得表の下で, 上述と同様に Replicator 方程式を導出する.

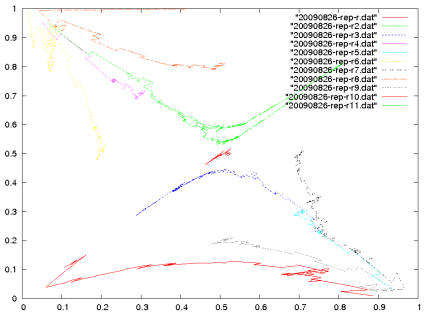

図 3: 2009 年 8 月 26 日のデータを利用し, 実線 (赤) が Replicator 方程式 (2.3) の軌跡を表している.

この図から分かるように, 各主体にリスクがあると, 各主体は約定するための戦略が選択されるということが分かる. そのため戦略が一致しやすくなり, 価格の上昇, 下落が起こりやすい状況であることを示している. 例えばこれは実際の市場においては, 押し目買いのような買いが買いを生むような戦略に対応する.

4 多項ロジットモデル

今まで期待利得が高くなるように戦略を選択するとしてきた. 実際の市場の板情報を, ミクロ計量経済学の手法である多項ロジットモデル (Multivariate Logit Model) を用いることにより, 各主体の行動を分析する.

ここでは $J(<\infty)$ 個の指値注文する株価/選択肢があり, 株価の値を y_i で表す. またここで各主体はそれぞれの期待利得を計算し, ある選択肢を選ぶと考えている. ただしここでは期待利得とある選択肢を選ぶ確率は比例関係にあるとする. また x_i という属性を持った主体 i が選択肢 j を選ぶ確率 π_{ij} を次のように表す.[6)]

$$P(y_i=j|x_i)=\pi_{ij}, \pi_{ij}=\frac{\exp(x_i'\beta_j)}{\sum_{r=i}^{J}\exp(x_i'\beta_j)}, j=1,\cdots,J.$$

π_{ij} を式変形し, 規格化すると, 次を得る.

$$\pi_{i1}=\frac{1}{1+\sum_{r=2}^{J}\exp(x_i'\beta_r)},$$

$$\pi_{ij}=\frac{\exp(x_i'\beta_j)}{1+\sum_{r=2}^{J}\exp(x_i'\beta_r)}, \quad j=2,\cdots,J.$$

次に戦略 1 を基準に戦略 n の選択確率を導出する. これを**オッズ比**と呼ぶこともある.

$$\frac{P(y_i=j|x_i)}{P(y_i=1|x_i)}=\frac{\pi_{ij}}{\pi_{i1}}=\exp(x_i'\beta_j)\Rightarrow\log\left(\frac{\pi_{ij}}{\pi_{i1}}\right)=x_i'\beta_j.$$

ここではある戦略を選択する確率 Y を次のように置き, 推定する.

$$Y=\alpha+\beta X+u.$$

ただし α は定数, X を対数行使価格, u を正規分布に従うノイズ項とする.[7)] ここで次のような板情報 (表 2) の場合を取り上げる.

このとき一般的な回帰分析の手法を用いると, 次のような需要, 供給関数を得ることができる.

$$\text{需要関数: } Y=583.93-146.27X,$$

[6)] Kikkawa [4] では, なぜ確率 π_{ij} が指数関数の形状をしているのかを, 統計力学で研究されている Ising モデルを用いて, 証明, さらには新たな Nash 均衡の解釈を与えている.

[7)] 動学に拡張する場合, 期待利得で考えるべきであると考えている. そのためここでの選択確率は, 約定確率・執行価格と約定したときに得られる利得の積である期待利得と比例していると考えることができるので, 次のように置くことができる.

$$Y=\alpha+\beta_1X_1+\beta_2X_2+u$$

X_1 を対数行使価格, X_2 を対数約定確率・執行価格とする.

(売呼値)	銘柄 (値段)	(買呼値)
0	成行呼値	0
492	9840 円	–
506	9830 円	–
444	9820 円	–
530	9810 円	–
784	9800 円	–
–	9790 円	197
–	9780 円	734
–	9770 円	640
–	9760 円	643
–	9750 円	598

表 2: 日経 225 先物 1 限月, 2009 年 11 月 5 日 9:03 の板の状態

$$\text{供給関数: } Y = -237.14 + 59.57X.$$

またこの需要, 供給関数はゲーム理論で言う, **最適応答対応**(best-response correspondence) となっている. よってこれから Nash 均衡点が求めることができる. 例えば上記の板情報の場合の Nash 均衡点は約 9740 円である. 特にここではこの板情報においては, Nash 均衡は指値価格よりも, 低いので, 約定価格が下がることが推測される.[8] またこのときの Nash 均衡は Pareto 最適な状況ではなく, 囚人のジレンマ的なゲームとなっていることが分かる. このように Nash 均衡の値から板情報において, 価格が下がりやすい, 上がりやすいということが推測することができる.

5 終わりに

以上のように吉川 [7] で定式化した金融市場のモデルを取り上げ, これに各主体にリスクがある場合に拡張した. さらには板情報をミクロ計量の手法を用いて, 実証分析, これに基づいた予測を行う新たな手法を提案した.

そこからリスクがある場合は, 各主体はリスクを避けるために, その他の主体と同様の戦略を取りやすい構造になっていることが分かった. また実証分析では, Kikkawa [4] の文脈で考察することができ, これを用いて, 板情報から次期の約定価格を予測することができる.

今後の課題として, まずミクロ計量分析の手法と基本モデルとの関係を明らかにする. 例えば, bull や bear という概念をどのように数値化していくのか, また実際市場の板「見せ板」と呼ばれる, 一種の攪乱的な数量を提示することがある. これをどのように取り除くのかなど, 数値として得られる市場のデータと理論との乖離をどのように取り扱うのかということが挙げられる.

次に板情報が時間とともに変化していく Panel データを取り扱うことである. 例えば西岡 他 [8] では隠れマルコフモデル (Hidden Markov Model) を用いて, 板情報を取り扱っていたが, 非線形状態空間モデルとして取り扱い, 理論と実証との比較を行う.

[8] また実際, 数秒後約定価格は下落した.

参考文献

[1] Arrow, Kenneth J. *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland, 1971

[2] Black, Fischer and Scholes, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–654 (1973)

[3] Easley, David and O'hara, Maureen: Time and the Process of Security Price, *The Journal of Finance*, Vol. 47, pp. 577–605 (1992)

[4] Kikkawa, Mitsuru: "Statistical Mechanics of Games — Evolutionary Game Theory —," Progress of Theoretical Physics Supplement, No. 179, pp. 216-226 (2009)

[5] 吉川 満: オプションの戦略的な価格付け : Black-Sholes 方程式の周辺, 北海道大学数学講究録, # 140, pp. 142-146 (2009)

[6] Kikkawa, Mitsuru: Co-evolution and Diversity in Evolutionary Game Theory : Stochastic Environment, 京都大学数理解析研究所講究録, 1654, pp. 102-111 (2009)

[7] 吉川 満: 進化ゲーム理論を用いたオプション市場分析, 人工知能学会研究会資料, SIG-FIN-003, pp. 23-28 (2009)

[8] 西岡寛兼, 鳥海不二夫, 石井健一郎: 板情報を用いた市場変化の分析, 人工知能学会研究会資料, SIG-FIN-007, pp. 58-63 (2009)

[9] Pratt, John W. : "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, Vol. 32, pp. 122-136 (1964)

[10] Weibull, Jorgen W.: *Evolutionary Game Theory*, The MIT Press (1995) (邦訳): 大和瀬達二 (監訳) 進化ゲーム理論, オフィスカノウチ, (1998)