

# 解釈性を持つマクロファクター構成手法

## Macro Factor Extraction Method with Interpretability

野間 修平<sup>1\*</sup> 中川 慧<sup>1</sup> 伊藤 彰朗<sup>1</sup>  
Shuhei Noma<sup>1</sup> Kei Nakagawa<sup>1</sup> Akio Ito<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 野村アセットマネジメント株式会社

<sup>1</sup> Nomura Asset Management Co., Ltd.

**Abstract:** 資産配分の文脈において、各資産の価格変動を横断的に説明する共通因子を構成し、これを介して資産配分を決定するアプローチが注目されている。このような価格変動の共通因子はリスクファクターと呼ばれる。特に、マルチアセット市場 (multi-asset market) を説明するリスクファクターはマクロ経済的な概念と紐づけて解釈されることが多く、マクロファクターとも呼ばれる。リスクファクターの構成手法としては主成分分析が広く用いられている。しかし、主成分分析によって構成されるリスクファクターは上位のものを除き、その解釈が困難であるという問題点がある。リスクファクターを介して資産配分を決定するアプローチにおいては、より多くのリスクファクターを解釈できることが望ましく、このような主成分分析の性質は実務上重大な問題である。本研究では上に掲げた主成分分析の問題点を解決する次元削減手法を提案し、人工データ及びマルチアセット市場データを用いた実験によってその有効性を示す。マルチアセット市場データを用いた実験では、提案手法によって構成されたマクロファクターを貿易、金融政策、外交政策など、相異なるマクロ経済的な概念と紐づけて解釈する。

## 1 序論

Markowitz によって提案された平均分散アプローチ [9] にかわり、推定が難しい期待リターンを使用せず、推定リスクの情報のみを用いてポートフォリオを構築する手法であるリスクベース・アプローチが近年盛んに研究されている [12] [5] [8] [4]。中でもリスクパリティ戦略はその有用性が実証的に示されており、実務家を中心に注目を集めている [12] [8]。一方、リスクパリティ戦略に対する批判も存在する。すなわち、リスクパリティ戦略は各資産のリスク寄与度を分散させているにすぎず、各資産のリスクを横断的に説明するリスクの源泉に関して十分な分散がなされていないという批判である [10] [3]。このようなリスクパリティ戦略の問題点に対する処方箋として、Meucci は diversification index と呼ばれるリスクの源泉に関する分散の程度を評価する指標を導入し、これを最大化する戦略を提案している [10]。また、Roncali and Weisang は各資産の価格変動を横断的に説明する共通因子であるリスクファクターの概念を導入し、これを制御対象とすることでリスクの源泉を分散させる Factor Risk Budgeting 戦略

を提案している [13]。

続いて、資産配分の文脈におけるファクターモデルの先行研究を概観する。株式市場の分析に用いられるファクターモデルの多くはファクターリターンもしくはファクターローディングのどちらか一方を既知とした上でもう一方を推定する。それに対して、マルチアセット市場 (multi-asset market) の分析に用いられるファクターモデルはファクターリターン及びファクターローディングをどちらも未知とすることが多く、その推定手法としては主成分分析が広く用いられている [2] [3] [16]。マルチアセット市場を説明するリスクファクターはマクロ経済的な概念と紐づけて解釈されることが多く、マクロファクターとも呼ばれる。例えば、Bhansali et al. は構成されたリスクファクターを経済成長及びインフレーションと紐づけて解釈し [3]、伊藤・中川は経済成長、実質金利、インフレーションと紐づけて解釈した [16]。リスクファクターをマクロ経済的な概念と紐づけて解釈することは、リスクファクターを介して資産配分を決定する戦略において重要である。資産配分戦略として Factor Risk Budgeting 戦略を採用するファンドマネージャーは、自身が持つ市場見通しに基づいて各リスクファクターに対するリスク配分比率を決定する。そのため、リスクファクターはマクロ経済的な概念をはじめとする、一般的な市場見通しと関連する概念と紐づいて解釈されている必要がある。例え

\*連絡先：野村アセットマネジメント株式会社  
〒135-0061 東京都江東区豊洲二丁目2番1号  
E-mail: shuhei.mi.st@gmail.com

本稿の内容は筆者らに属し、所属する組織としての見解を示すものではない。また、本稿にあり得べき誤りは全て筆者らに帰属する。

ば、景気拡大、金利低下を市場見通しとして持つファンダメンターは、経済成長に対応すると解釈したリスクファクターに対して正の、実質金利に対応すると解釈したリスクファクターに対して負のエクスポージャーを取得するよう、リスク配分比率を決定する。

## 1.1 本稿で用いる記法

正整数  $N, T, K \in \mathbb{Z}_{>0}$  をそれぞれ分析対象となる資産の数、観測されたリターンのサンプル数、ファクターモデルにおいて採用するリスクファクターの本数とする。  $R \in \mathbb{R}^{T \times N}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{T \times K}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{N \times K}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{T \times N}$  をそれぞれ各資産のリターン、ファクターリターン、ファクターローディング、残差リターンが並んだ行列とする。以上の記法を用いて、マルチファクターモデルは次のように表現される：

$$\begin{cases} r_{ti} = \sum_{k \in [K]} f_{tk} v_{ik} + e_{ti} & (\text{成分表示}) \\ R = FV^\top + E & (\text{行列表示}). \end{cases}$$

$I_K$  は  $K$  次の単位行列を表す。  $\|\cdot\|_2$  は  $L_2$  ノルムを表す。行列ノルム  $\|\cdot\|_F, \|\cdot\|_{1,1}$  はそれぞれ Frobenius ノルム、  $L_{1,1}$  ノルム<sup>1</sup>を表す。関数  $\sigma_{\max}(\cdot)$  は行列を引数にとり、その最大特異値を返す関数を表す。関数  $\text{ColScale}(\cdot)$  は各列ベクトルが零ベクトルでない行列を引数にとり、その各列ベクトルを  $L_2$  ノルムが 1 となるように尺度化した行列を返す関数を表す<sup>2</sup>。関数  $\text{diag}(\cdot)$  は正方行列を引数にとり、その対角成分を並べたベクトルを返す関数を表す<sup>3</sup>。関数  $\text{prox}(\cdot|\cdot)$  は近接写像 [11] を表す<sup>4</sup>。

## 1.2 データセット

本稿では 7 つのアセットクラスに大別される 95 資産を分析対象とする。ここで、7 つのアセットクラスとは通貨、国債、社債、株式の 4 つのアセットクラスに、農畜産物、エネルギー、金属の 3 つの商品カテゴリーを加えたものを指す。表 1 は本稿で分析対象とする 95 資産の内、商品を除く 71 資産に関して、本稿における呼称をアセットクラス及び帰属する国・地域別にまとめたものである。表 2 はこれら 71 資産のリターンを計算するために使用する指数及び各資産の呼称に関する命名規則をまとめたものである。表 3 は本稿で分析対象とする 24 の商品指数を商品カテゴリー別にまとめたものである。リターンには金曜引け週次リターンを採用し、各資産のリターン  $r_i \in \mathbb{R}^T$  はその  $L_2$  ノ

<sup>1</sup>  $\|R\|_{1,1} = \sum_{t \in [T]} \sum_{i \in [N]} |r_{ti}|$

<sup>2</sup>  $\text{ColScale}(V) = \left[ \frac{1}{\|v_1\|_2} v_1 \cdots \frac{1}{\|v_K\|_2} v_K \right]$

<sup>3</sup>  $\text{diag}(D) = [d_{11} \cdots d_{KK}]^\top$

<sup>4</sup>  $\text{prox}(V|a\|\cdot\|_{1,1}) = \arg\min_{V'} \left\{ a\|V'\|_{1,1} + \frac{1}{2}\|V' - V\|_F^2 \right\}$

ルムが 1 となるように尺度化する。また、リターンの計測期間は 2015 年 1 月 2 日から 2019 年 12 月 27 日までの約 5 年間とする。従って、分析対象となる資産の数  $N$ 、観測されたリターンのサンプル数  $T$  はそれぞれ  $N = 95$ ,  $T = 260$  を満たす。

## 2 次元削減手法

本章では代表的なリスクファクター構成手法である主成分分析及びスパース主成分分析という 2 つの次元削減手法を概観し、両者を対比させる形でその特徴と問題点を整理する。

### 2.1 主成分分析

主成分分析（以下、PCA）は最も代表的な次元削減手法であり、次の最適化問題を解くことによってファクターを構成する [1]：

$$\begin{aligned} & \underset{F, G, V}{\text{minimizing}} && \frac{1}{2} \|R - FV^\top\|_F^2 \\ & \text{subject to} && F = RG \\ & && G^\top G = I_K \\ & && V^\top V = I_K. \end{aligned}$$

目的関数はリスクファクターによって各資産のリターンを近似した際の残差平方和となっており、ファクターを構成する問題として自然な設定となっている。また、本最適化問題には、ファクターリターン  $f_k \in \mathbb{R}^T$  が、各資産のリターン  $r_i \in \mathbb{R}^T$  の線形結合として  $F = RG$  と表されるという制約が課せられている。これは、ファクターリターンを複製するポートフォリオのウェイトを明示的に求めることに対応している。そこで、本稿ではこのような行列  $G \in \mathbb{R}^{N \times K}$  を複製ウェイトと呼ぶ<sup>5</sup>。本最適化問題の大域的最適解  $(F^*, G^*, V^*)$  は  $G^* = V^*$  を満たす [1]。また、 $G^*, V^*$  は、 $R^\top R \in \mathbb{R}^{N \times N}$  の固有ベクトルのうち、対応する固有値に関する上位  $K$  本をその列ベクトルに持つ行列となる [1]。

PCA の問題点として、上位数本のリスクファクターを除いて、構成されたリスクファクターを解釈することが難しいという点が挙げられる。先行研究においても、PCA によって構成されたリスクファクターのうち、解釈が与えられているものは上位数本に限られる [2] [3] [16]。図 1 は第 1.2 節で導入したマルチアセット市場データに対して PCA を適用することで構成された第 10 リスクファクターのファクターローディング  $v_{10} \in \mathbb{R}^N$  を示したものである。ローディングは各アセットクラス

<sup>5</sup> 一般的な名称でないことに注意されたい。Erichson et al. はこれを “weight matrix” と呼んでいる [6]。

表 1: 本稿における各指数の呼称

	国																			地域						
	DE	FR	IT	NL	ES	GB	CH	SE	ZA	JP	AU	HK	KR	SG	TH	IN	RU	TW	CN	US	CA	BR	DM	EM	EU	
通貨			EUR			GBP	CHF	SEK	ZAR	JPY	AUD	HKD	KRW	SGD	THB	INR	RUB	TWD	CNY		CAD	BRL				
国債	DE02Y DE05Y DE10Y DE30Y	FR10Y	IT02Y IT10Y	-	-	GB10Y	-	-	-	JP10Y	AU03Y AU10Y	-	-	-	-	-	-	-	-	US02Y US05Y US10Y US20Y	CA10Y	-	-	-	-	
社債	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	US-Ind US-Util US-Fin US-HY	-	-	-	-	-	EU-Ind EU-Util EU-Fin EU-HY
株式	DE	FR	IT	NL	ES	GB	CH	SE	ZA	JP-TOPIX JP-NK225	AU	HK	KR	SG	TH	IN	RU	TW	CN-HSCEI CN-A50	US-SP500 US-Dow US-NASDAQ	CA	BR	DM-ExUS	EM	EU-Large EU-Small	

表 2: 各資産のリターンを計算するために使用する指数及び各資産の呼称に関する命名規則

アセットクラス	使用する指数	呼称の命名規則
通貨	対米国ドルのスポットレート	通貨コード
国債	限月のロールを考慮した先物のリターン指数	受渡適格債の発行国及び残存年数
社債 (投資適格社債)	現物のリターン指数	発行体企業が帰属する国・地域及びセクター
社債 (ハイイールド債)	現物のリターン指数	発行体企業が帰属する国・地域
株式	限月のロールを考慮した先物のリターン指数	帰属する国・地域 ただし、同一国に帰属する指数を複数採用する場合はその名称を追記

表 3: 商品指数の呼称

カテゴリー	本稿における呼称		
農畜産物	ChiWheat	Coffee	LeanHogs
	KanWheat	Sugar	LiveCattle
	Corn	Cocoa	FeederCattle
	Soybeans	Cotton	
エネルギー	CrudeOil	RBOB-Gasoline	Gasoil
	HeatingOil	BrentCrudeOil	NaturalGas
金属	Aluminium	Lead	Gold
	Copper	Zinc	Silver
	Nickel		

内で正負が入り混じる複雑な形状をしており、また、0成分を持つなど構造的な特徴もないため、このようなリスクファクターをマクロ経済的な概念と紐づけて解釈することは容易ではない。しかし、マルチアセット市場において Factor Risk Budgeting 戦略を運用するファンドマネージャーは、解釈を与えることができるリスクファクターが多ければ多い程、リスクファクターへのリスク配分比率を通じて自身の市場見通しをより精緻にポートフォリオに反映することが可能になるため、解釈可能なリスクファクターが少ないという PCA の性質は実務上重大な問題である。

## 2.2 スパース主成分分析

前節で示した PCA の問題点を解決する次元削減手法にスパース主成分分析 (以下, SPCA) がある [15] [6]. PCA と同様に, SPCA はファクターリターン  $f_k \in \mathbb{R}^T$

が各資産のリターン  $r_i \in \mathbb{R}^T$  の線形結合で表されるという制約のもと、残差平方和を最小化する次の最適化問題を解くことによってファクターを構成する:

$$\begin{aligned} & \underset{F, G, V}{\text{minimizing}} && \frac{1}{2} \|R - FV^\top\|_F^2 + \lambda \|G\|_{1,1} \\ & \text{subject to} && F = RG \\ & && V^\top V = I_K. \end{aligned}$$

PCA との相違点は, SPCA では目的関数に複製ウェイト  $G$  に関する  $l_1$  正則化項が加えられている点である。  $l_1$  正則化によって, SPCA によって構成される複製ウェイト  $G$  はスパースな, すなわち, 多くの 0 成分を持つ行列となる。従って, 各リスクファクターのファクターリターンを複製するポートフォリオは比較的少数の資産から構成されることになり, リスクファクターの解釈が容易となることが期待される。図 2 は第 1.2 節で導入したマルチアセット市場データに対して SPCA を適用することで構成された第 1, 第 2 リスクファクターの複製ウェイト  $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^N$  を示したものである<sup>6</sup>。第 1 リスクファクターは主に各国の株式に対して, 第 2 リスクファクターは主に各国の国債及び米国の投資適格社債に対して, それぞれ非 0 のウェイトを持つため, 前者は国際的な経済成長期待, 後者は国際的な金融緩和期待に対応するリスクファクターであると解釈することができる<sup>7</sup>。なお, 本稿では紙面の都合により第 1, 第 2 リスクファクターの複製ウェイトのみを示したが, 第

<sup>6</sup>ハイパーパラメータ  $K, \lambda$  はそれぞれ  $K = 10, \lambda = 3 \frac{\sigma_{\max}(R)^2}{NK}$  と設定した。

<sup>7</sup>第 1 リスクファクターの解釈は [3] [16] と同一であり, 第 2 リスクファクターの解釈は [2] と同一である。

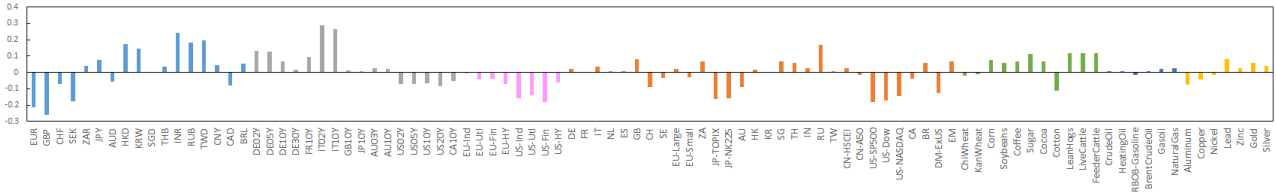


図 1: PCA によって構成された第 10 リスクファクターのファクターローディング  $v_{10}$

3 から第 10 リスクファクターも第 1, 第 2 リスクファクターと同様に非 0 の複製ウェイトが特定の資産クラスに集中しており, 容易に解釈を与えることができる<sup>8</sup>.

一方, SPCA には次に掲げる 2 つの問題点が存在する. 一点目は, 上述の優位性の裏返しである. 非 0 の複製ウェイトが特定の資産クラスに集中することはリスクファクターの解釈性を向上させるが, その一方で各資産のリスクの源泉を分散させるという Meucci や Bhansali が提案した戦略 [10] [2] と矛盾する. 二点目は SPCA によって構成されたファクターリターン同士が相関を持つという点である. 表 4 は第 1.2 節で導入したマルチ資産市場データに対して SPCA を適用することで構成されたファクターリターンに関して, その相関係数の絶対値をまとめたものである. SPCA

表 4: SPCA によって構成されたファクターリターンの相関係数の絶対値

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fac1	1.00									
Fac2	0.33	1.00								
Fac3	0.46	0.06	1.00							
Fac4	0.39	0.20	0.36	1.00						
Fac5	0.41	0.31	0.21	0.11	1.00					
Fac6	0.00	0.18	0.50	0.18	0.19	1.00				
Fac7	0.44	0.19	0.53	0.32	0.04	0.28	1.00			
Fac8	0.08	0.20	0.17	0.08	0.11	0.15	0.13	1.00		
Fac9	0.30	0.08	0.07	0.02	0.36	0.08	0.03	0.16	1.00	
Fac10	0.25	0.10	0.15	0.09	0.03	0.10	0.16	0.08	0.02	1.00

によって構成されたファクターリターンは 45 ペア中 11 ペアの相関係数の絶対値が 0.3 を上回り, 中には 0.53 を示す組も存在する. しかし, ファクターリターンが互いに直交するもとは, 構成したリスクファクターをポートフォリオのリスク管理や要因分解に活用することができる<sup>9</sup>ため, ファクターリターンが互いに直交することは実務上望ましい性質である.

<sup>8</sup>具体的には, 第 3 リスクファクターから順に通貨及び新興国株式, 石油関連商品, 欧州社債指数, 欧州各国の通貨, 工業用金属, 農産物, イタリア国債及びイタリア株式, 畜産物にそれぞれ非 0 の複製ウェイトが集中した.

<sup>9</sup>これは, ファクターリターンが互いに直交するもとは, 資産及びポートフォリオのリスクを各リスクファクターに起因するリスクに分解することができるという性質に基づく. この性質は次のように示すことができる.  $w \in \mathbb{R}^N$  をポートフォリオのウェイトと

### 3 提案手法

以上の先行研究を踏まえ, 本章では PCA と比較してより多くのリスクファクターに対して解釈を与えることが可能であり, ファクターリターンが互いに直交するという, PCA 及び SPCA の問題点を同時に解決するリスクファクター構成手法を提案する. PCA 及び SPAC と同様, 本手法に対応する最適化問題を残差平方和最小化問題として次のように定式化する:

$$\begin{aligned} & \underset{F, V}{\text{minimizing}} && \frac{1}{2} \|R - FV^\top\|_F^2 + \lambda \|V\|_{1,1} \\ & \text{subject to} && f_k^\top f_{k'} = 0 \quad (k, k' \in [K], k \neq k') \\ & && \|v_k\|_2 = 1 \quad (k \in [K]). \end{aligned}$$

PCA 及び SPCA との相違点は次の三点である. 一点目は  $l_1$  正則化を施す変数である. SPCA が複製ウェイト行列  $G$  に対して  $l_1$  正則化を施しているのに対し, 提案手法ではファクターローディング  $V$  に対して  $l_1$  正則化を施した.  $l_1$  正則化によって, 提案手法によって構成されるファクターローディング  $V$  は多くの 0 成分を持つ行列となる. 従って, 各リスクファクターは比較的少数の資産に対してその価格変動を説明することになり, リスクファクターの解釈が容易となることが期待される. 二点目はファクターリターン  $F$  に課される制約である. PCA 及び SPCA が複製ウェイト  $G$  の存在を仮定し,  $F = RG$  なる制約を課しているのに対し, 提案手法はファクターリターン  $F$  が互いに直交するという制約のみを課している. 三点目はファクターローディング  $V$  に関する制約である. 提案手法ではファクターローディング  $V$  の各列ベクトルに関して, その  $L_2$  ノルムを 1 に制約している. これは, ファクターリターン  $F$  及びファクターローディング  $V$  の尺度に関する不定性を取り除き, ファクターローディング  $V$  の解をス

すれば, ポートフォリオのリターンを並べたベクトル  $r_P \in \mathbb{R}^T$  は  $r_P = R w$  を満たす. 従って, ポートフォリオの推定リスク  $\sigma_P$  を  $\sigma_P \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T-1} r_P^\top r_P}$  と定めれば, ファクターリターンが互いに直交するとき, ポートフォリオの推定リスク  $\sigma_P$  は次式を満たす:

$$\begin{aligned} (T-1) \cdot \sigma_P^2 &= w^\top R^\top R w \simeq w^\top V F^\top F V^\top w \\ &= \sum_{k \in [K]} \|f_k\|_2^2 \cdot (v_k^\top w)^2. \end{aligned}$$

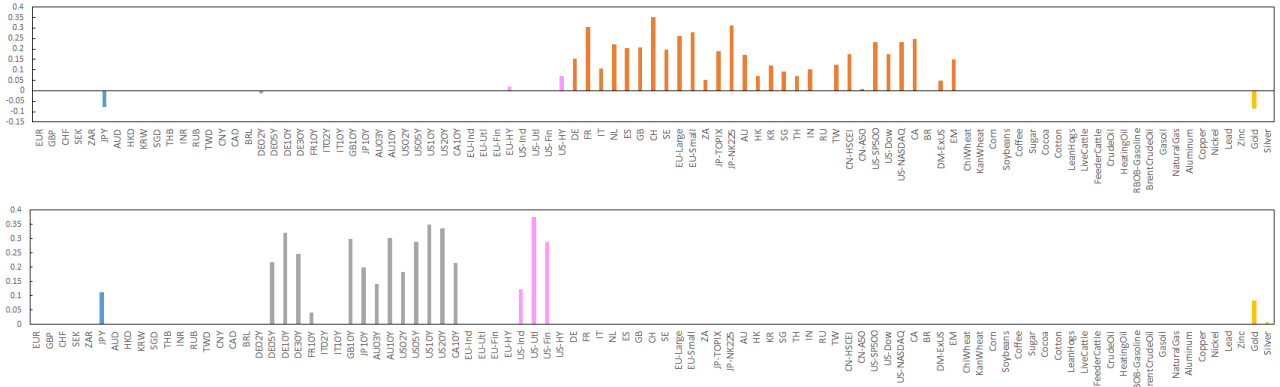


図 2: SPCA によって構成された第 1, 2 リスクファクターの複製ウェイト  $g_1, g_2$

パースなものとするために導入したものである<sup>10</sup>。

### 3.1 求解アルゴリズム

本節では提案手法に対応する残差平方和最小化問題を求解するためのアルゴリズムを提案する。まず、ファクターリターンに対応する変数  $F$  を、直交行列  $U \in \mathbb{R}^{T \times K}$  と対角行列  $D \in \mathbb{R}^{K \times K}$  との積として  $F = UD$  と分解し、 $U, D, V$  を変数に持つ先の問題と等価な最適化問題を構成する：

$$\begin{aligned} & \underset{U, D, V}{\text{minimizing}} \quad \frac{1}{2} \|R - UDV^\top\|_F^2 + \lambda \|V\|_{1,1} \\ & \text{subject to} \quad U^\top U = I_K \\ & \quad \quad \quad D : \text{diagonal matrix} \\ & \quad \quad \quad \|v_k\|_2 = 1 \quad (k \in [K]). \end{aligned}$$

このような変形を施すことによって、変数  $U, D$  は他の二変数を固定したもとの容易に大域的最適解を計算することができる。そこで、本研究ではこの性質を踏まえ、ブロック座標降下法 [14] のように変数  $U, D, V$  をサイクリックに更新するアルゴリズムを提案する。本アルゴリズムを擬似コードを用いて要約したものが Algorithm 1 である。擬似コード中の非負整数  $l$  は反復回数を表す。

以下では変数  $U, D, V$  それぞれの更新アルゴリズムを詳説する。先に述べたように、変数  $U, D$  は他の変数を定行列とみなしたとき、その大域的最適解を容易に求めることができる。そこで、変数  $U, D$  の更新は自身を

<sup>10</sup>任意の非 0 実数  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対して  $\|R - FV^\top\|_F = \|R - (aF)(\frac{1}{a}V)^\top\|_F$  が成立するため、 $V$  に関する  $L_2$  ノルム制約を課さない場合、目的関数の第一項  $\frac{1}{2} \|R - FV^\top\|_F^2$  の値を一定に保ったまま、目的関数の第二項  $\lambda \|V\|_{1,1}$  をいくらでも小さくすることができる。従って、 $L_2$  ノルム制約を課さない場合、ファクターローディング  $V$  の各成分は 0 に収束し、ファクターリターン  $F$  の各成分は発散する。

---

#### Algorithm 1 Proposed Algorithm

---

**Input:**  $R, \lambda, U_{(0)}, D_{(0)}, V_{(0)}$

$l \leftarrow 0$

**repeat**

$$U_{(l+1)} \leftarrow \underset{U \in \mathbb{R}^{T \times K}}{\text{argmin}} \left\{ \|R - UD_{(l)}V_{(l)}^\top\|_F^2 \mid U^\top U = I_K \right\}$$

$$D_{(l+1)} \leftarrow \underset{D \in \mathbb{R}^{K \times K}}{\text{argmin}} \left\{ \|R - U_{(l+1)}DV_{(l)}^\top\|_F^2 \mid D : \text{diagonal} \right\}$$

Calculate  $V^{\text{tmp}}$  by evaluating a proximal operator

$$V_{(l+1)} \leftarrow \text{ColScale}(V^{\text{tmp}})$$

$l \leftarrow l + 1$

**until convergence**

**return**  $(U_{(l)}, D_{(l)}, V_{(l)})$

---



---

#### Algorithm 2 Solve Procrustes Problem

---

**Input:**  $R, D_{(l)}, V_{(l)}$

**Output:**  $\underset{U \in \mathbb{R}^{T \times K}}{\text{argmin}} \left\{ \|R - UD_{(l)}V_{(l)}^\top\|_F^2 \mid U^\top U = I_K \right\}$

$$B^{\text{tmp}} \leftarrow RV_{(l)}D_{(l)}$$

$$P\Sigma Q^\top \stackrel{\text{SVD}}{\leftarrow} B^{\text{tmp}}$$

**return**  $PQ^\top$

---

唯一の変数とみなしたときの大域的最適解により行う。 $U$  に関する残差平方和最小化問題は直交 Procrustes 問題 [7] と等価であるため、Algorithm 2 に示すように、行列積計算及び特異値分解によってその大域的最適解を計算することができる。また、 $D$  を唯一の変数とみなしたとき、残差平方和  $\|R - U_{(l+1)}DV_{(l)}^\top\|_F^2$  は  $\text{diag}(D)$  に関する凸二次関数であるため、その大域的最適解は次式となる：

$$\begin{aligned} & \underset{\text{diag}(D)}{\text{argmin}} \left\{ \|R - U_{(l+1)}DV_{(l)}^\top\|_F^2 \mid D : \text{diagonal} \right\} \\ & = \text{diag} \left( U_{(l+1)}^\top R V_{(l)} \right). \end{aligned}$$

最後に、 $V$  の更新アルゴリズムを示す。 $V$  の更新は次の二段階の手続きから成る。一段階目の手続きでは近接勾配法 [11] における一反復、すなわち、次に示すような近接写像の評価を行う：

$$V^{\text{tmp}} \leftarrow \text{prox} \left( V_{(l)} - \frac{1}{\mu_{(l)}} \left( \frac{\partial}{\partial V} f_l (V_{(l)}) \right) \middle| \frac{\lambda}{\mu_{(l)}} \|\cdot\|_{1,1} \right).$$

ここで、関数  $f_l$  は更新時点における残差平方和を、実数  $\mu_{(l)}$  は  $\nabla f_l$  の Lipschitz 定数を表す<sup>11</sup>。  $L_{1,1}$  ノルムに対応する近接写像の評価はソフト閾値処理と等価である [11]。 加えて、関数  $f_l$  の勾配は解析的に表示することができる<sup>12</sup>ため、一段階目の手続きは行列計算及び比較演算のみによって達成できる。二段階目の手続きではファクターローディングに課された制約を満たすため、一段階目の手続きによって得られた行列  $V^{\text{tmp}}$  の各列ベクトルを  $L_2$  ノルムが 1 となるように尺度化する。本アルゴリズムの有効性は第 4 章で実験的に示す。

## 4 数値実験

本章では人工データ及びマルチアセット市場データを用いた数値実験によって提案手法の有効性を示す。

### 4.1 人工データ実験

本節では人工データを用いた数値実験によって提案手法の有効性を示す。人工データの生成プロセスは次に掲げる二段階から成る。一段階目ではファクターリターン  $F$ 、ファクターローディング  $V$ 、残差リターン  $E$  を表 5 に従って生成する。続いて、二段階目では  $FV^T + E$  なる計算を行い、これを観測されたリターン行列  $R$  とする。続いて、閾値処理というナイーブな考え方に基

表 5: 人工データの生成プロセス

生成する行列	各成分の生成	生成後の加工
ファクターリターン $F$	標準正規分布 $\mathcal{N}_1(0, 1^2)$	QR 分解を施すことで直交行列を構成する
ファクターローディング $V$	標準正規分布 $\mathcal{N}_1(0, 1^2)$	列ベクトルごとに次の操作を施す ・絶対値に関する下位 50% の成分を 0 置換 ・ $L_2$ ノルムが 1 となるように尺度化
残差リターン $E$	正規分布 $\mathcal{N}_1(0, 0.01^2)$	-

づくファクターローディング  $V$  の推定手法を本実験の

<sup>11</sup>それぞれ次のようになる：

$$f_l(V) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left\| R - U_{(l+1)} D_{(l+1)} V^T \right\|_F^2$$

$$\mu_{(l)} = \max_{k \in [K]} \left\{ \left| [D_{(l+1)}]_{kk} \right|^2 \right\}.$$

<sup>12</sup> $\nabla f_l(V) = VD_{(l+1)}^2 - R^T U_{(l+1)} D_{(l+1)}$

ベースライン手法として導入する。ベースライン手法は次に掲げる三段階の手続きから成る。

1. 生成されたリターン行列  $R$  に対して PCA を適用する。
2. PCA によって構成されたファクターローディング  $V$  の成分のうち、その絶対値に関する下位 100 ·  $Q\%$  を 0 置換する。ただし、各列ベクトルを非零ベクトルに保つため、各列ベクトルにおける絶対値が最大の成分に対しては 0 置換を行わない。従って、ハイパーパラメータ  $Q$  は  $\frac{1}{NK}, \dots, \frac{(N-1)K}{NK}$  の値をとり得る。
3. 各列ベクトルをその  $L_2$  ノルムが 1 となるように尺度化する。

本実験ではファクターローディングの各成分が 0 であることを陽性と定義し、ROC 曲線及び Area Under the Curve (以下、AUC) を計算する。実験セットアップは下記の通りである。資産数  $N$  を 20、観測されたリターンのサンプル数  $T$  を 1000、リスクファクターの本数  $K$  を 3 とし、リターン行列  $R$  は提案手法及びベースライン手法のハイパーパラメータ  $\lambda, Q$  ごとに 100 通り生成する。図 3 は ROC 曲線を示したものである。AUC は提案手法が 0.903、ベースライン手法が 0.785 となり、提案手法の有効性が示された。

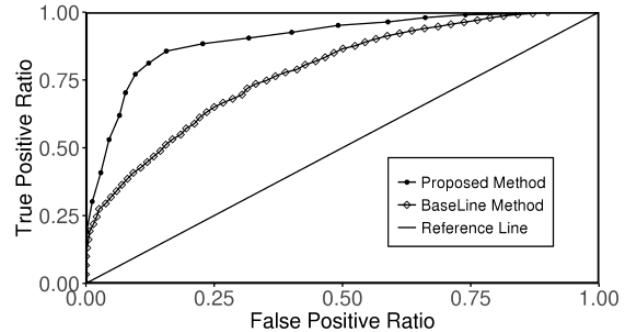


図 3: 提案手法及びベースライン手法に対応する ROC 曲線

### 4.2 マルチアセット市場データ実験

本節では第 1.2 節で導入したマルチアセット市場データに対して提案手法を適用することで構成されたリスクファクターをマクロ経済的な観点から解釈する。本稿では紙面の都合により、構成した 10 本のリスクファクターのうち、第 4、第 6、第 7 リスクファクターに対する解釈のみを記載する。この選定理由は次の二点である。一点目は、下位のリスクファクターを観察する

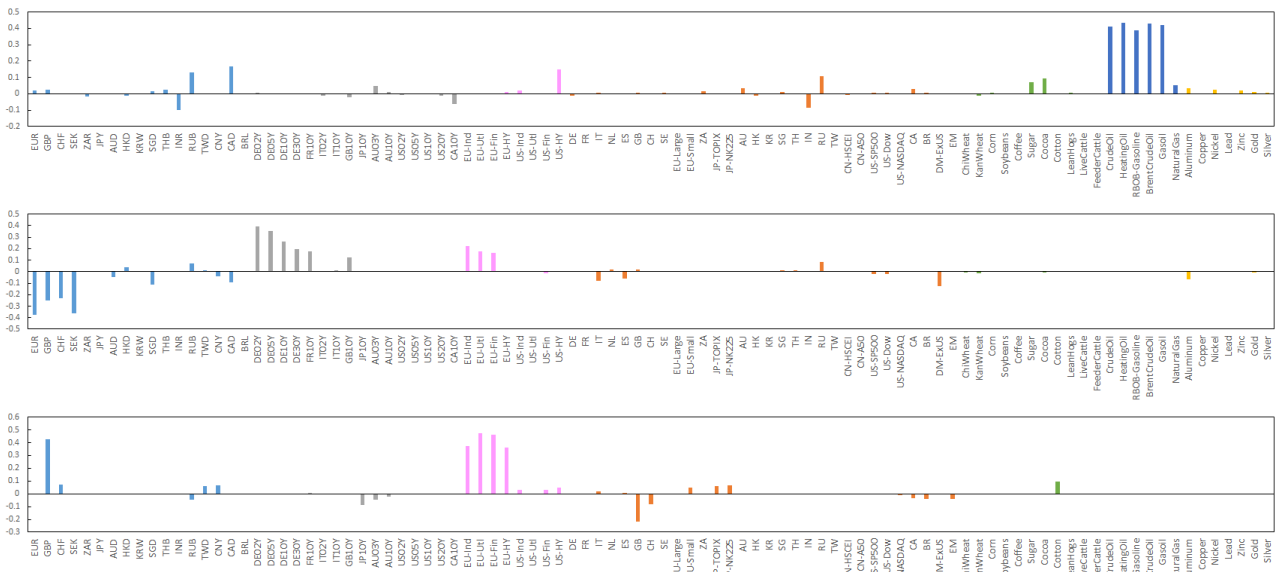


図 4: 提案手法によって構成された第 4, 第 6, 第 7 リスクファクターのファクターローディング  $v_4, v_6, v_7$

ことによって、下位のリスクファクターを解釈することが難しいという PCA の問題点を提案手法が解決していることを示すためである。二点目は、これらのリスクファクターがそれぞれ貿易、金融政策、外交政策という、相異なるマクロ経済的な概念と紐づいて解釈されるという、示唆に富む結果となったためである<sup>13</sup>。

図 4 は提案手法によって構成された第 4, 第 6, 第 7 リスクファクターのファクターローディング  $v_4, v_6, v_7$  を示したものである<sup>14</sup>。まず、第 4 リスクファクターを解釈する。当ファクターは石油関連商品、米国ハイイールド債券指数、カナダドル、ロシアルーブルに対して正のローディングを持つ。米国ハイイールド債券指数の構成銘柄は、時価総額ベースで 10% 以上がエネルギー関連企業をその発行体にもつため、石油需要の拡大はそうした企業の信用拡大、ひいては米国ハイイールド債券指数の上昇に寄与する。さらに、ロシア、カナダは世界有数の産油国であり、石油需要の拡大は石油関連商品の輸出拡大、ひいてはロシアルーブル高、カナダドル高の進行を促進する。従って、当ファクターは石油需要の拡大に対応すると解釈することができる。次に、第 6 リスクファクターを解釈する。当ファクターは欧州各国の国債、投資適格社債指数に対して正の、欧州各国の通貨に対して負のローディングを持つ。一般

に、自国通貨の金利低下によって国債及び投資適格社債は価格が上昇し、通貨は通貨安・ドル高が進行するため、当ファクターは欧州各国の中央銀行に対する緩和的な金融政策への期待に対応すると解釈することができる。最後に、第 7 リスクファクターを解釈する。当ファクターはイギリスポンド、欧州社債指数に対して正の、イギリス株式指数に対して負のローディングを持つ。Brexit の穏健化への期待、すなわち、イギリスが経済的な繋がりを保ったまま欧州連合を離脱することへの期待は、イギリス経済に対する不透明性の解消、ひいてはイギリスポンド高の進行や欧州社債指数の上昇を促進する。さらに、Brexit 穏健化への期待が高まることによるイギリスポンド高の進行はイギリスの外需型企業に嫌気され、イギリス株式指数の下落を促進する。従って、当ファクターは **Brexit 穏健化への期待**に対応すると解釈することができる。

最後に、提案手法によって構成されたリスクファクターの説明力を確認する。リスクファクターの寄与率を  $1 - \frac{\|R - FV^T\|_F^2}{\|R\|_F^2}$  で定める。このとき、主成分分析及び提案手法によって構成されたリスクファクターの寄与率はそれぞれ 67.14%, 66.05% となった。提案手法によって構成されるリスクファクターはその解釈が容易である一方、説明力は主成分分析によって構成されるリスクファクターに劣る。しかし、毀損の程度は限定的であり、実用に足る水準である。

<sup>13</sup>第 5, 第 8, 第 9, 第 10 リスクファクターはそのファクターローディングがそれぞれ特定の資産クラスや地域に集中しており、解釈が容易であったため本稿では割愛した。具体的には、それぞれ農産物、工業用金属、南欧各国に帰属する資産、畜産物に非 0 のローディングが集中した。

<sup>14</sup>ハイパーパラメータ  $K, \lambda$  はそれぞれ  $K = 10, \lambda = 3 \frac{\sigma_{\max}(R)^2}{N K}$  と設定し、Algorithm 1 の初期値  $U_{(0)}, D_{(0)}, V_{(0)}$  はリターン行列  $R$  に特異値分解を施すことで構成した。

## 5 結論

本研究では解釈性とファクターリターンの直交性を両立するリスクファクター構成手法を提案し、その有効性を人工データ及びマルチアセット市場データを用いた実験によって示した。マルチアセット市場データを用いた実験では、提案手法によって構成されたマクロファクターが貿易、金融政策、外交政策など相異なるマクロ経済的な概念と紐づいて解釈され、提案手法の有効性が実証的に示された。

今後の課題としては、提案手法が持つハイパーパラメータ $\lambda$ を調整する手法や、局所収束性を持つ求解アルゴリズムを提案することが挙げられる。

## 謝辞

本稿の執筆にあたり、多くの知識や示唆を頂いた野村アセットマネジメント株式会社の大野一郎氏及び大本隆氏に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] Hervé Abdi and Lynne J Williams. Principal component analysis. *Wiley interdisciplinary reviews: computational statistics*, Vol. 2, No. 4, pp. 433–459, 2010.
- [2] Vineer Bhansali. Beyond risk parity. *The Journal of Investing*, Vol. 20, No. 1, pp. 137–147, 2011.
- [3] Vineer Bhansali, Josh Davis, Graham Rennison, Jason Hsu, and Feifei Li. The risk in risk parity: A factor-based analysis of asset-based risk parity. *The Journal of Investing*, Vol. 21, No. 3, pp. 102–110, 2012.
- [4] Benjamin Bruder and Thierry Roncalli. Managing risk exposures using the risk budgeting approach. *Available at SSRN 2009778*, 2012.
- [5] Yves Choueifat and Yves Coignard. Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 35, No. 1, pp. 40–51, 2008.
- [6] N Benjamin Erichson, Peng Zheng, Krithika Manohar, Steven L Brunton, J Nathan Kutz, and Aleksandr Y Aravkin. Sparse principal component analysis via variable projection. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 80, No. 2, pp. 977–1002, 2020.
- [7] John C Gower. Generalized procrustes analysis. *Psychometrika*, Vol. 40, No. 1, pp. 33–51, 1975.
- [8] Sébastien Maillard, Thierry Roncalli, and Jérôme Teïletche. The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 36, No. 4, pp. 60–70, 2010.
- [9] Harry Markowitz. Portfolio selection. *Investment under Uncertainty*, 1959.
- [10] Attilio Meucci. Managing diversification. *Risk*, Vol. 22, No. 5, pp. 74–79, 2009.
- [11] Neal Parikh, Stephen Boyd, et al. Proximal algorithms. *Foundations and Trends® in Optimization*, Vol. 1, No. 3, pp. 127–239, 2014.
- [12] Edward Qian. Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. *Panagora Asset Management*, 2005.
- [13] Thierry Roncalli and Guillaume Weisang. Risk parity portfolios with risk factors. *Quantitative Finance*, Vol. 16, No. 3, pp. 377–388, 2016.
- [14] Paul Tseng. Convergence of a block coordinate descent method for nondifferentiable minimization. *Journal of optimization theory and applications*, Vol. 109, No. 3, pp. 475–494, 2001.
- [15] Hui Zou, Trevor Hastie, and Robert Tibshirani. Sparse principal component analysis. *Journal of computational and graphical statistics*, Vol. 15, No. 2, pp. 265–286, 2006.
- [16] 伊藤 彰朗・中川慧. マクロファクターの定量化とリスク分析への活用. *証券アナリストジャーナル*, Vol. 56, No. 8, pp. 80–90, 2018.