

# ビットコインにおけるラフボラティリティとラフ取引高

## Rough volatility and trading volume of Bitcoin

高石哲弥

Tetsuya Takaishi

広島経済大学

Hiroshima University of Economics

**Abstract:** 金融資産価格の収益率には *Stylized facts* と呼ばれる共通に現れる性質があることが知られている。例えば、収益率分布のファットテイル性や絶対値収益率の長期記憶性、ボラティリティクラスターリングなどがある。ボラティリティには長期記憶性が現れるのが知られているが、何故そのような性質が現れるのかは解明されていない。近年、株価の対数ボラティリティ変化の時系列に注目すると、長期記憶性はなく、ハースト指数が 0.5 以下の反持続的な（ラフな）時系列となることが知られてきている。本研究では、ビットコイン時系列に注目し、ビットコインの実現ボラティリティを解析し、対数ボラティリティ変化の時系列に反持続的な性質があるかどうかについて分析をした。また、ボラティリティと取引高や取引数は相関があることから、取引高と取引数の変化にもボラティリティと似た性質が現れると考えられるので、これらについても分析し、反持続的な性質が現れるかどうかを調べた。その結果、ボラティリティ及び取引高と取引数の変化の時系列は反持続性を示すことが分かった。また、これらの時系列はマルチフラクタル性も示すことが分かった。

## 1. はじめに

近年金融資産価格の時系列の統計的性質は精力的に調べられており、多くの金融資産価格に共通に現れる性質があることが知られている。それらの性質は“*Stylized facts*”と呼ばれている[1]。 *Stylized facts* として特に重要な性質は次である。(1) 収益率分布は裾野の厚いファットテイル分布である。(2) 収益率の自己相関は短期の相関である。(3) 絶対値収益率の自己相関は長期相関である。(4) ボラティリティクラスターリングを示す。実証分析では、多くの *Stylized facts* を再現でき、予測精度の高いモデルが有用とされる。そのようなモデルの例として GARCH モデル[2]があり、実証分析でよく利用されている。

*Stylized facts* がなぜ生じるかは十分に理解されていないわけではない。特に、絶対値収益率に長期の自己相関が出る真の原因は不明である。絶対値収益率のべき乗の自己相関も調べられており、株価の場合にはべき指数が 1、為替の場合はべき指数が 0.5 付近で最も大きくなることが知られている。この性質は、テイラー効果[3,4,5,6]と呼ばれている。ビットコインにもテイラー効果が確認されており[7]、べき指数が

約 0.4 で最大となることが示されている。

また、絶対値収益率と同様にボラティリティにも長期相関が見られ、ボラティリティ時系列のハースト指数は 0.5 以上と持続的な性質になっている。従って、ボラティリティの時系列をモデル化する場合には、長期記憶性を持ったモデルを利用するのが自然な流れとなる。そのようなモデルとして、対数ボラティリティを非整数ブラウン運動でモデル化したものがある[8]。この時、長期記憶性を持たせるためにモデル内のハースト指数は 0.5 以上が設定される。

一方で、株価の対数ボラティリティ（実現ボラティリティ）の変化量の時系列の実証分析から、ハースト指数が 0.5 以下となっており、変化量の時系列は反持続的となっていることが近年明らかとなってきた。そこで、ハースト指数が 0.5 以下の非整数ブラウン運動でボラティリティをモデル化する試みも行われている[9]。Ref.[9]では、ハースト指数が 0.5 以下の性質を持つボラティリティをラフボラティリティと呼んでいる。

本研究では、ビットコイン価格に注目し、対数ボラティリティ変化量の時系列のハースト指数を計算し、株価と同様に反持続的な性質が現れるかどうかを調べる。また、Ref.[9]では、時系列はモノフラクタ

ルであると結論されているが、本研究では Ref.[10,11]の手法によるマルチフラクタル解析を行い、対数ボラティリティ変化量にマルチフラクタル性があるかどうかを調べる。ビットコインの収益率時系列には、すでにマルチフラクタル性があることが知られている[12]。

## 2. ビットコイン価格

本研究では、COINBASE 取引所の Tick データを利用した[13]。利用したデータ区間は、2015年1月28日から2019年1月6日である。Tick データから様々なサンプリング間隔の収益率データを作成し、実現ボラティリティを計算する。本研究では、5分間隔の収益率データを用い、次章で述べる手法によって実現ボラティリティを計算する。

図1はTick データから作成した日次収益率の時系列を表している。また、図2と3はそれぞれ日次取引高と日次取引数の時系列である。

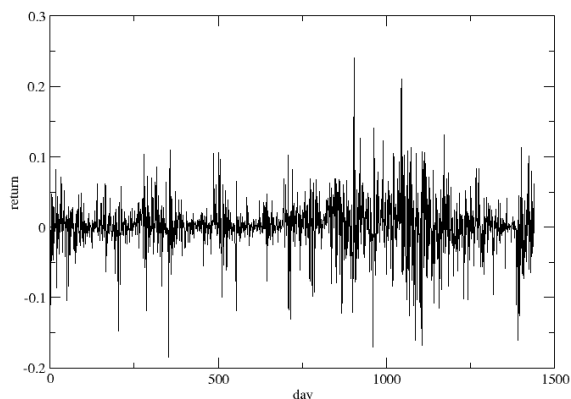


図1：ビットコイン価格の日次収益率

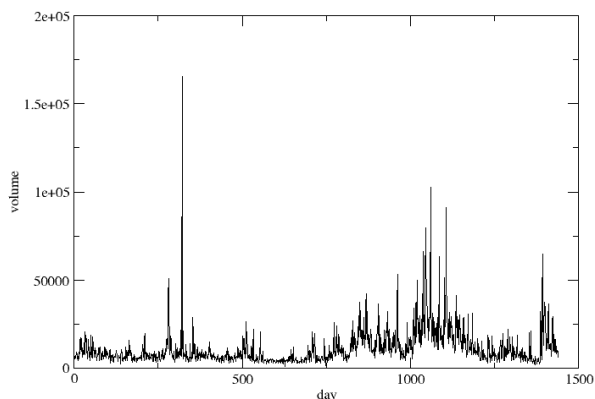


図2：日次取引高

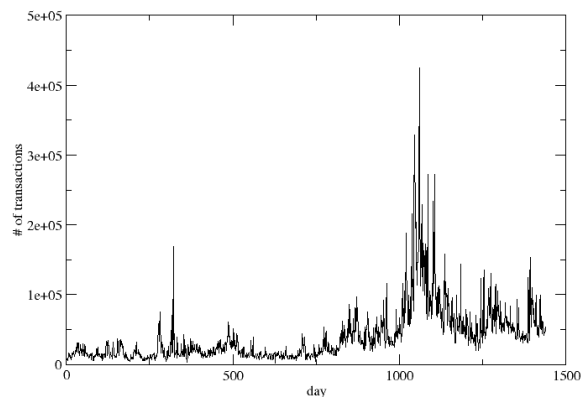


図3：日次取引数

## 3. 実現ボラティリティ (Realized volatility)の計算

本研究では、実現ボラティリティをボラティリティとして、対数ボラティリティの変化の時系列を分析する。t日におけるある時刻 $t_0$ から $t_0+T$ までの期間Tをn個で分割し、i番目の収益率を

$$r_t(t_0 + i \Delta t) = \ln P(t_0 + i \Delta t) - \ln P(t_0 + (i - 1) \Delta t) \quad (1)$$

とする。ここで時間間隔 $\Delta t$ は $\Delta t = T/n$ であり、これはサンプリング時間を表す。この時、期間Tにおけるサンプリング時間 $\Delta t$ でのRVは分割した収益率の2乗を足し合わせることによって、以下のように計算される。

$$RV_t^{(\Delta t)} = \sum_{i=1}^n r_t^2(t_0 + i \Delta t) \quad (2)$$

ここで、対数価格 $\ln p(t)$ が以下の確率過程に従っているとす。Wは標準ブラウン運動、 $\sigma(t)^2$ はスポットボラティリティを表す。

$$d \ln p(t) = \sigma(t) dW \quad (3)$$

このとき、(2)式はサンプリング時間ゼロの極限で Integrated volatility  $\int_{t_0}^{t_0+T} \sigma(t)^2 dt$ に収束することが示される。

Zhou(1996)は対数価格に独立なノイズが加わるモデルを導入し、その時のRVにどのようなバイアス加わるかを計算した。対数価格+ノイズのもとで観測される収益率が以下のように修正される。

$$r^*(s) = r(s) + \eta(s) \quad (4)$$

ここで、 $\eta(s)$ は収益率に対して独立なノイズである。

この時、観測されるRV\*は

$$RV_t^{*(\Delta t)} = RV_t^{(\Delta t)} + \sum_{i=1}^n r_t(t_0 + i\Delta t) \eta(i) + \sum_{i=1}^n \eta^2(i) \quad (5)$$

となる。右辺の第2項は収益率とノイズが独立であれば期待値はゼロとなる。第3項がノイズによるバイアスにあたり、ノイズの分散を $\omega^2$ とすると期待値

は $n\omega^2$ となり、 $n$ に比例して大きくなる。また、サンプリング時間は $\Delta t=T/n$ であるから、バイアスはサンプリング時間に反比例することになる。

バイアスの影響を修正する手法として、Hansen と Lunde による方法[14]があり、彼らの方法では、RVの平均が日次収益率の分散と一致するようにRVに修正ファクター(定数)をかける。RVに定数を掛けただけの時系列のハースト指数等の性質は変化しないので、本研究では修正をかけていないRVの時系列を取り扱う。

図4はサンプリング間隔5分の収益率から計算した日次RVについて、RV<sup>1/2</sup>の時系列を表している。更に、RV<sup>1/2</sup>の変化

$$Rt = \log(\sigma_t) - \log(\sigma_{t-1}) \quad (6)$$

の時系列を図示したのが図5である。ここで、 $\sigma_t \equiv RV_t^{1/2}$ とおいている。図1の収益率に比べると非常にスムーズな変動となっているように見える。

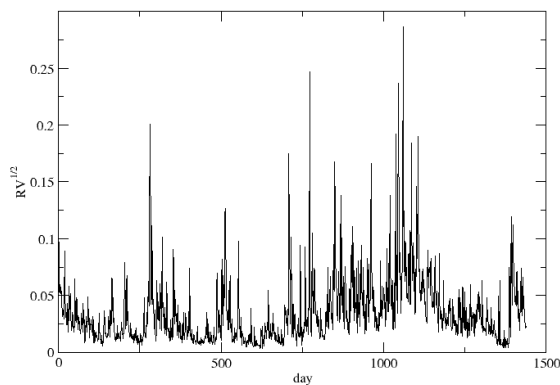


図4：サンプリング間隔5分のRV<sup>1/2</sup>の時系列

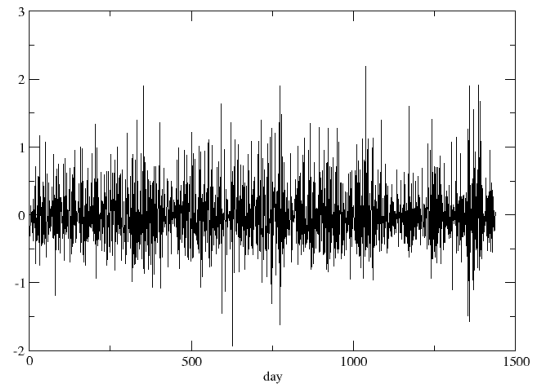


図5：RV<sup>1/2</sup>の変化の時系列

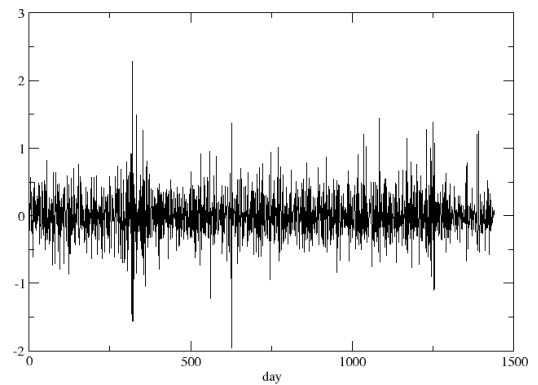


図6：取引高の変化の時系列

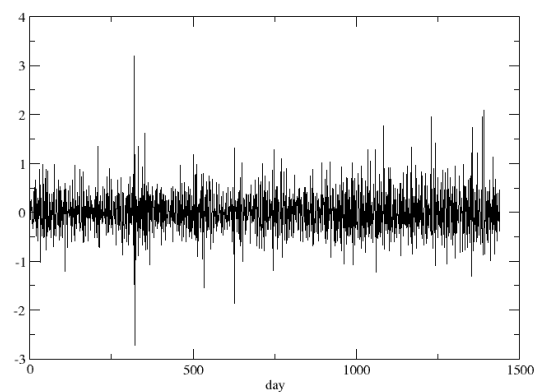


図7：取引数の変化の時系列

同様に、取引高と取引数の変化について図示したのがそれぞれ図6と図7である。取引高と取引数の変化は以下の定義である。

$$Rt = \log(V_t) - \log(V_{t-1}) \quad (7)$$

ここで、 $V_t$ は  $t$  日における取引高または取引数を表している。図 6 と 7 も図 5 と同様のスムーズな振る舞いが見られる。

#### 4. マルチフラクタル解析

本研究では、Kantelhardt らによる Multifractal detrended fluctuation analysis (MFDFA) の方法 [10] によってマルチフラクタル解析を実行し、一般化ハースト指数を求めた。MFDFA 法は以下の手続きから成る。

- ① オリジナルの時系列  $\{x_t, t=1, \dots, N\}$  から次のプロファイル  $y(k)$  を作成する。

$$y(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \quad (8)$$

ここで、 $\bar{x}$  は時系列  $x_t$  の平均値である。

- ② プロファイル  $y(k)$  を長さ  $s$  の  $N_s = N/s$  個のセグメントに分け、セグメント内でトレンドを除去したデータの分散を求める。具体的には以下の、 $\nu$  番目のセグメント、 $\nu = 1, \dots, N_s$  に対して  $F^2(s, \nu)$  を計算する。

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (y[(\nu-1)s+i] - p_\nu(i))^2 \quad (9)$$

(9) 式中の  $p_\nu(i)$  はトレンドを除去するための関数で、本研究ではセグメント内のデータを 3 次関数でフィットした関数を利用した。また、 $N$  は  $s$  の倍数とは限らないので、その場合、最後の端数のデータが残ってしまう。これらのデータも利用するために、最後のデータから順番に並べ、上記の手続きを繰り返す。具体的には、 $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$  に対して、以下を計算する。

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (y[N - (\nu - N_s)s + i] - p_\nu(i))^2$$

$$(10)$$

- ③ 計算した分散を利用して  $q$  次の揺らぎ関数を以下のように定義する。

$$F_q(s) = \left( \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(s, \nu)]^{q/2} \right)^{1/q} \quad (11)$$

もし、時系列が長期のべき的相関を持つなら、(11) 式は以下のように振る舞うことが期待される。

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (12)$$

ここで、 $h(q)$  は一般化ハースト指数とよばれるものである。 $q = 2$  のとき、 $h(2)$  はハースト係数に一致する。時系列  $h(q)$  が  $q$  に依存するとき、マルチフラクタル性を持つ。ガウス時系列の場合、 $h(q)$  は  $h(2)$  の場合と変わらず、マルチフラクタル性は現れない。

- ④ (12) 式の振る舞いから一般化ハースト指数  $h(q)$  を求める。

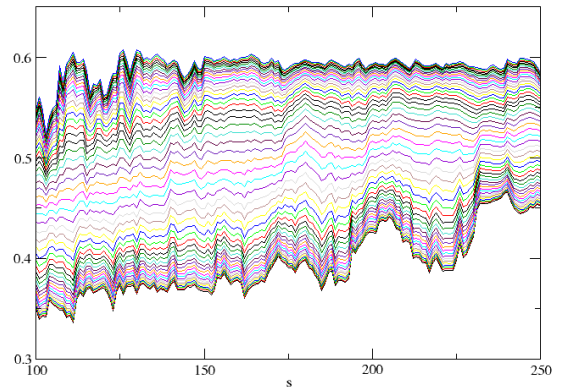


図 8 : 揺らぎ関数  $F_q(s) \sim s^{h(q)}$

図 8 は  $RV^{1/2}$  の対数変化の時系列のデータから揺らぎ関数 (11) 式をもとめ、両対数でプロットした図である。 $q = -25 \sim 25$  までの様々な  $q$  において揺らぎ関数を計算している。一番下のグラフが  $q = -25$  に対応し、一番上は  $q = 25$  に対応する。これらのグラ

フを直線でフィットし、得られた傾きが一般化ハースト指数に対応する。

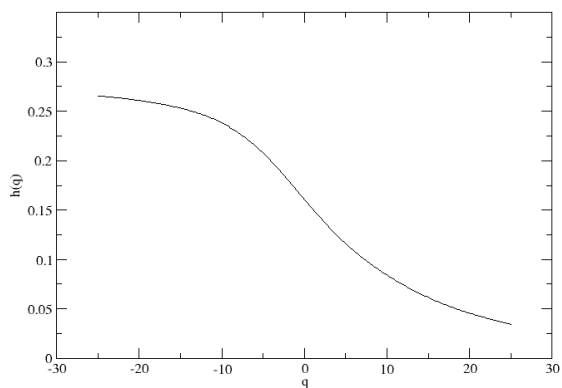


図 9 :  $RV^{1/2}$  変化の時系列の一般化ハースト指数

$h(q)$

図 9 は図 8 の結果からも求めた一般化ハースト指数  $h(q)$  を図示したものである。 $h(q)$  は全領域で 0.5 以下となっており、反持続的となっている。また、 $h(q)$  は  $q$  に依存して変化しており、マルチフラクタル性を有している。

同様に、図 10 と 11 はそれぞれ取引高変化と取引数変化の一般化ハースト指数を求めたものである。これらも、指数の値が 0.5 以下となっており、反持続性を示し、かつ  $q$  による依存性がありマルチフラクタル性を有している。

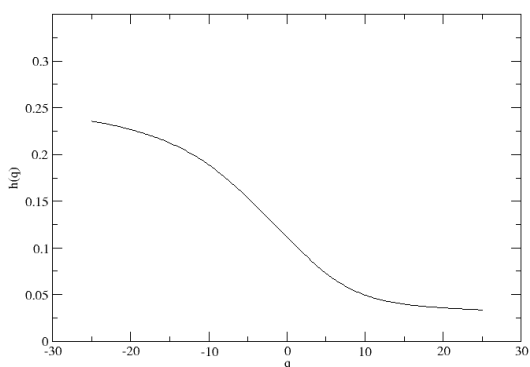


図 10 : 取引高変化時系列の一般化ハースト指数

$h(q)$

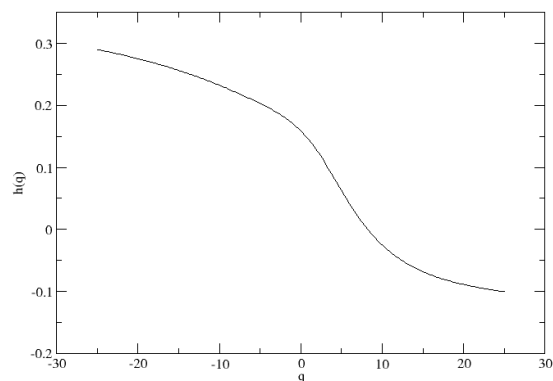


図 11 : 取引数変化時系列の一般化ハースト指数

$h(q)$

表 1 はハースト指数  $h(2)$  の値をまとめたものある。ハースト指数は 0.1 前後であり、0.5 よりもかなり低い値となっている。Ref.[9]も株価について 0.1 程度のハースト指数の値を得ている。

表 1 : ハースト指数  $h(2)$

	$RV^{1/2}$	取引高	取引数
$h(2)$	0.141	0.0950	0.126

## 6. まとめ

本研究では、ビットコイン価格の実現ボラティリティを計算し、その対数変化の時系列を分析した。その結果、時系列はハースト指数が 0.5 以下となっており、反持続的性質を持つことが分かった。また、一般化ハースト指数は  $q$  の値によって変化し、マルチフラクタル性があることが分かった。取引高及び取引数の対数変化の時系列も同様に反持続的でマルチフラクタル性があることが分かった。よって、Ref.[9]の言葉を借りれば、ビットコインのボラティリティ及び取引高、取引数はラフであるといえる。

## 謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 18K01556 の助成による。

## 参考文献

- [ 1 ] R.Cont, Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance 1, 223–236,

(2001)

- [ 2 ] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327, (1986)
- [ 3 ] S. J. Taylor, *Modelling financial time series*, John Wiley & New jersy, 1986.
- [ 4 ] Z. Ding, C. W. Granger, R. F. Engle, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of empirical finance* 1 (1) , 83–106, (1993)
- [ 5 ] Z. Ding, C. W. Granger, Modeling volatility persistence of speculative returns: a new approach, *Journal of econometrics* 73 (1), 185–215, (1996)
- [ 6 ] M. Dacorogna, R. Gencay, U. Müller, O. Pictet, R. Olsen, *An introduction to high-frequency finance*, Academic Press, 2001.
- [ 7 ] T.Takaishi, T.Adachi, Taylor effect in Bitcoin time series, *Economics Letters* 172, 5-7, (2018)
- [ 8 ] F. Comte and E. Renault. Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4):291–323, (1998).
- [ 9 ] J. Gatheral, T. Jaisson & M. Rosenbaum, Volatility is rough, *Quantitative Finance*, 18, 933-949, (2018)
- [ 1 0 ] J.W.Kantelhardt et al., Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series, *Physica A* 316, 87-114, (2002).
- [ 1 1 ] C.K. Peng, et al., Mosaic organization of DNA nucleotides, *Phys. Rev. E* 49, 1685, (1994)
- [ 1 2 ] T. Takaishi, Statistical properties and multifractality of bitcoin, *Physica A* 506, 507–519, (2018)
- [ 1 3 ] Bitconcharts, <https://api.bitcoincharts.com/v1/csv/>
- [ 1 4 ] P.R. Hansen, A. Lunde, A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1, 1)? *J. Appl. Econometrics* 20 (7), 873–889, (2005)