

シミュレーションによるインデックス投資の市場価格形成への影響分析

松浦 出^{*1}
Izuru Matsuura

和泉 潔^{*1}
Kiyoshi Izumi

坂地 泰紀^{*1}
Hiroki Sakaji

松島 裕康^{*1}
Hiroyasu Matsushima

島田 尚^{*1}
Takashi Shimada

^{*1}東京大学 大学院工学系研究科
School of Engineering, the University of Tokyo

In this paper, we modeled stock markets to investigate the effect of index investing on stock price formation. We showed that index investing has little effect on stock price formation in our stock markets model by analyzing results from experiments with various market settings.

1. はじめに

インデックス投資とよばれる投資法がある。投資する資産を、すべての株式に、その時価総額の比で按分して投資するというものである。[Sharpe 64]に始まる一連の研究を理論的背景に持つこの投資法により運用される資産は、現在では投資信託の総運用資産の無視できない割合を占めるに至っている。

インデックス投資では、企業の業績を全く勘案せずに投資が行われる。そのためインデックス投資があまりに大きなシェアを占めた場合、証券市場での価格形成が適正に行われず、有望な企業に資金が集まらない、あるいは投資に値しない企業に資金が集まってしまう可能性が考えられる。

本論文では、インデックス投資が本当にこのような価格形成の問題を引き起こすのか、また引き起こすとすれば、それはどの程度価格形成に影響を与えるのかを検証した。具体的には、証券市場に存在する証券と市場参加者、および価格決定をモデルとして設計し、いくつかのパラメータについてのシミュレーション実験を通して影響を分析した。

2. 証券市場のモデル

本節では、本研究で扱う証券市場のモデルについて述べる。

証券市場には m 種類の証券が存在し、その 1 株あたりのペイオフ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T$ は、平均 $\bar{\theta}$ 、共分散行列 Σ の正規分布 $\mathcal{N}(\bar{\theta}, \Sigma)$ に従う。また無リスク資産が存在し、その利率は 0 である。時間 $t = 0$ で、すべての証券が 1 単位だけ供給される。

証券市場には n 社のファンドが参加している。うち $n-1$ 社がインデックス投資を行わないファンド（以下ではアクティブファンドと呼ぶ）であり、1 社がインデックス投資を行うファンド（以下インデックスファンドと呼ぶ）である。

すべてのファンドは時間 $t = 0$ で投資し、 $t = 1$ に回収する。回収までにポートフォリオを組み替えることはできない。

$n-1$ 社のアクティブファンドはすべて絶対的リスク回避度一定型の効用関数を持つ。 j 番目のアクティブファンドは $t = 0$ で θ に関するシグナル $s_j = \theta + \varepsilon_j + \eta$ を受けとる。ここで、 θ は次期の証券のペイオフ、 ε_j はファンドに固有の誤差、 η はすべてのファンドに共通して入りこむ誤差を表し、 $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\varepsilon)$ 、 $\eta \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\eta)$ 、 $(\Sigma_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \Sigma, \Sigma_\eta = \sigma_\eta^2 \Sigma)$ を仮定する。アクティブファンドは受けとったシグナルをもとに、自身の期待効用を最大化するよう行動する。

ただ 1 社存在するインデックスファンドは各証券の時価総額に応じて投資する。インデックスファンドの証券 k への投

資額は、証券 k の時価総額がすべての証券の時価総額の和に占める割合に、運用総資産を掛けた額である。

2.1 アクティブファンドの行動

各アクティブファンドは、自身の期待効用を最大化するよう投資する。アクティブファンドの効用関数には絶対的リスク回避度一定型を仮定する。すなわち j 番目のアクティブファンドの効用関数 $u_j(x)$ は、 $t = 1$ での運用資産 y に対して、

$$u_j(y) = -e^{-\rho y} \quad (1)$$

と表せる。 $\rho > 0$ は絶対的リスク回避度である。 ρ はすべてのアクティブファンドに共通であると仮定する。

この状況では、シグナル s_j を得たアクティブファンド j の投資 x_j は次の最適化問題の解である。

$$\text{maximize } E \left[u_j \left(\theta^T x_j \right) \middle| s_j \right] \quad (2)$$

$$\text{subject to } p^T x_j = b_j \quad (3)$$

ただし θ' は m 種類の証券に無リスク資産を加えた $\theta' = (1, \theta_1, \dots, \theta_m)^T$ のことであり、 p は $t = 0$ での無リスク資産を含む証券の市場価格ベクトル $p = (1, p_1, \dots, p_m)^T$ 、 b_j はアクティブファンド j の運用資産である。

実はこの最適化問題は次の問題と等価である。^{*1}

$$\text{maximize } \theta_j^T x - \frac{\rho}{2} x^T \Sigma_j x \quad (4)$$

$$\text{subject to } p^T x_j = b_j \quad (5)$$

θ_j 、 Σ_j はそれぞれ s_j を所与とした θ' 、 Σ' の条件付き平均、条件付き分散である。この解は方程式、

$$\begin{pmatrix} \rho \Sigma_j & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_j \\ b_j \end{pmatrix} \quad (6)$$

を解くことで得られる。

2.2 インデックスファンドの行動

インデックスファンドはマーケットポートフォリオに投資する。すなわち、証券価格 $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ と運用資産 b に対して、各証券に $b(p_1, \dots, p_m)^T / \sum_i p_i$ だけ投資する^{*2}。

^{*1} 証明は付録参照

^{*2} すべての証券の供給を 1 に正規化しているので、時価総額は価格と等しい。そのため時価総額の比が $(p_1, \dots, p_m)^T / \sum_i p_i$ となる

2.3 価格の決定方法

証券の価格は、すべての証券の超過需要が0となる価格で決定される。^{*3} 価格 $p \in \mathbb{R}^m$ における証券の超過需要 $D(p) \in \mathbb{R}^m$ とは、 $D_j(p) \in \mathbb{R}^m$ を、価格が p であるときの第 j ファンドの需要として、次の式で定義される量である。

$$D(p) = \sum_{j=1}^n D_j(p) - 1 \quad (7)$$

超過需要を0とする p は、 p についての方程式 $D(p) = 0$ をニュートン法で解くことで得られる。

2.4 各証券がどの程度正確に価格付けられているかの指標

インデックスファンドが存在せず、アクティブファンドが受け取るシグナルが、 $\theta + \eta$ であるとき、つまり $\sigma_\varepsilon = 0$ の場合を、最も正確な情報が反映された市場と考える。この市場で実現する価格 p_f を完全情報価格と呼ぶことにし、これをベンチマークとする。ある市場がどの程度情報を反映しているかを、その市場で実現する価格 p_p が完全情報価格からどの程度離れているか表す指標

$$d(p_p) = \frac{\|p_p - p_f\|}{\|p_f\|} \quad (8)$$

により評価する。以下ではこの指標を完全情報価格からの乖離度と呼ぶ。

3. シミュレーション実験による検証

3.1 パラメータの決定法

本モデルでは、証券市場はファンドの数 n 、証券の種類 m 、ペイオフの期待値 $\bar{\theta}$ と共分散行列 Σ 、アクティブファンドの絶対的リスク回避度 ρ 、ファンドに固有の誤差の大きさ σ_ε 、共通の誤差の大きさ σ_η のパラメータで決定される。証券に関するパラメータ $m, \bar{\theta}, \Sigma$ は、東証第1部の1業種を1つの証券と対応させて、2010年1月から2018年9月までの業種別時価総額の月次データから定める。2010年1月から2018年9月までの業種毎の時価総額の月次成長率 μ とその共分散行列 Σ_μ をモーメント法により推定する。2018年9月の業種 $i \in \{1, 2, \dots, 33\}$ の時価総額 S_i を、すべての業種の時価総額の和 $\sum_{i=1}^{33} S_i$ で割ったものを s_i とし、 $s = (s_1, \dots, s_{33})^T$ とする。これらの値を用いて、 $\bar{\theta} = \mu * s$ 、 $\Sigma = (s s^T) * \Sigma_\mu$ (ただし $*$ は要素ごとの積) とする。

ρ の値に応じて投資行動がどのように変化するかを見るために、簡単な例を挙げる。確率0.8で賭け金が2倍に、確率0.2で0になるギャンブルを考える。パラメータ ρ の絶対的リスク回避度一定型効用を持つ人が資産 b のうち w だけをこのギャンブルに回すとする。彼のギャンブルへの投資額 w は、 X を成功確率0.8のベルヌーイ分布に従う確率変数として、

$$\mathbb{E} \left[-e^{-\rho(1-w+2wX)} \right] \quad (9)$$

を最大化するよう決定される。この関数を最大化する w は、

$$w = \frac{15}{16\rho} \quad (10)$$

*3 この価格決定モデルは経済学で一般均衡理論として知られるものである。詳細は [Jean- Pierre 07]1 章などを参照。

である。絶対的リスク回避度一定型の効用関数を持つ人は、その資産の多寡にかかわらずギャンブルへの投資額を決める。^{*4} $\rho = 1$ であれば15/16を、 $\rho = 15$ であれば1/16を、 $\rho = 150$ であれば1/160をギャンブルに回すわけである。実験の詳細の節で詳述する通り、本実験では各アクティブファンドの運用資産は1/160から1/16程度である。前述のギャンブルのような有利な投資家への投資額がこのようなものであることを考えると、絶対的リスク回避度 ρ は1から64程度に設定するのがよいだろう。

アクティブファンドの推定誤差の大きさ $\sigma_\varepsilon, \sigma_\eta$ については、どのような値が適切であるか見当がつかないため、 $(\sigma_\varepsilon, \sigma_\eta) \in \{1, 2, 4, 8, \dots, 64\}^2$ のすべての場合について調べ上げる。

$\sigma_\varepsilon, \sigma_\eta$ の値について、もう少し詳しく解釈しておく。まずシグナル $s_j = \theta + \varepsilon_j + \eta$ のもとでの θ の条件付き期待値と分散は、

$$\mathbb{E}[\theta | s_j] = \bar{\theta} + \Sigma (\Sigma + \Sigma_\varepsilon + \Sigma_\eta)^{-1} (s_j - \bar{\theta}) \quad (11)$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2}{1 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2} \bar{\theta} + \frac{1}{1 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2} s_j \quad (12)$$

$$\text{Var}[\theta | s_j] = \Sigma - \Sigma (\Sigma + \Sigma_\varepsilon + \Sigma_\eta)^{-1} \Sigma \quad (13)$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2}{1 + \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2} \Sigma \quad (14)$$

である。各アクティブファンドの受け取るシグナルがどの程度信頼できるかは $\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$ のみによって決定される。 $\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2$ が小さければ小さいほど、ファンドは自身が受け取ったシグナルをより信頼する。 σ_ε^2 と σ_η^2 個別の値は、ファンド間のシグナルがどの程度ばらつくかにも影響する。

3.2 実験の詳細

インデックスファンドの運用資産が市場に占める割合と、完全情報価格からの乖離度の関係を調べるために、次のような実験を行った。 $m, \bar{\theta}, \Sigma$ はすべての実験で前述の、東証1部の業種別時価総額から定めた値を使う。またファンドの数は $n = 16$ を採用する。各実験では、パラメータ $\rho, \sigma_\varepsilon, \sigma_\eta$ の値を1つ選んだ。インデックスファンドの運用資産 C_i を決定し、アクティブファンドの運用資産を $(1 - C_i)/(n - 1)$ で定めた。シード値を1から20まで変化させ、それぞれのシード値について、この市場で実現する価格 p_p を計算し、同じシード値を用いて完全情報価格 p_f を計算した。結果として得られた p_p の p_f からの乖離度 $d(p_p)$ と、 C_i の値との関係性を評価した。

3.3 結果と考察

図1は、 $\rho = 16$ を固定して、 $\sigma_\varepsilon, \sigma_\eta$ ごとに横軸に C_i を、縦軸に $d(p_p)$ をプロットしたものである。インデックスファンドの運用資産 C_i の大きさにかかわらず、完全情報価格からの乖離度はほぼ一定のようである。 C_i が大きくなるにつれて完全情報価格からの乖離度が線形に増加する傾向があるようには見えないが、この原因はおそらく次のようなものである。

本実験ではアクティブファンドの効用関数に絶対的リスク回避度一定型を仮定したので、アクティブファンドの運用資産の額によらず、アクティブファンドがリスク資産に投資する額は一定である。一方インデックスファンドは運用資産のすべてを

*4 ファンドの効用関数に絶対的リスク回避度一定型を仮定すると、ファンドの運用資産の規模によってその性質が大きく変わってしまう。ファンドが投資家にある一定の性質を持つ金融商品を提供するものであると考えると、この特徴を持つ効用関数を採用するのはあまり適切ではない。当該仮定は計算時間を削減するための技術的なものである。

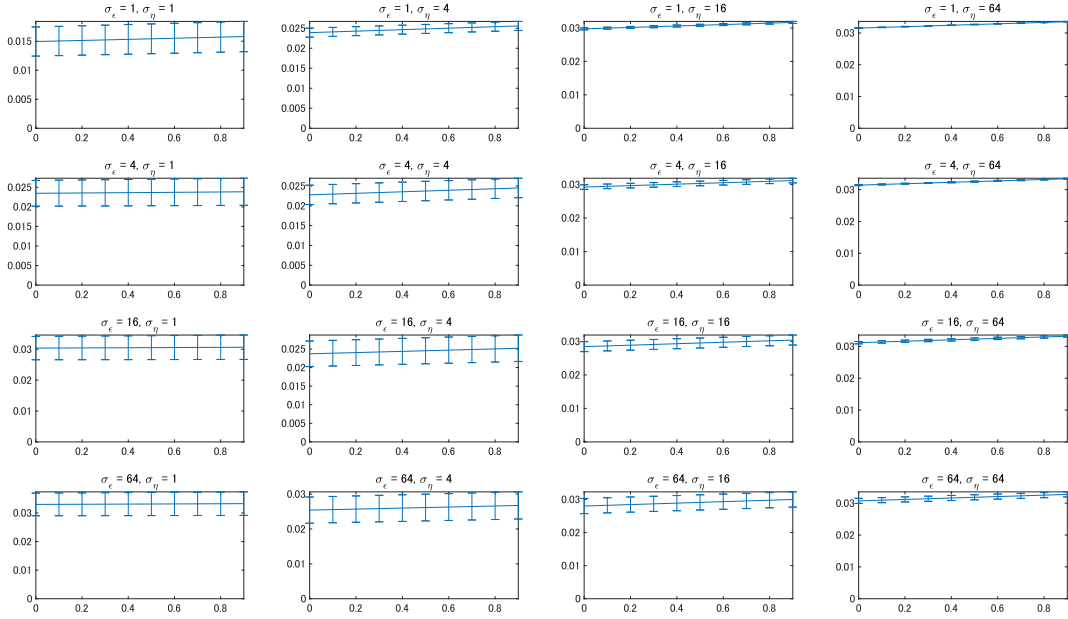


図 1: $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2$ ごとの、インデックスファンドのシェア（横軸）と完全情報価格からの乖離度（縦軸）との関係

リスク資産に投資するので、 C_i の値に応じて市場全体でのリスク資産への投資額が線形に増加する。リスク資産に投資された額が大きいほど各リスク資産の価格は上昇して、 $C_i = 0$ の状況で計算された完全情報価格から乖離するはずである。

ρ の値を $\rho = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ と変化させて同一の分析をしたところ、 $\rho = 16$ のときと同じく、 C_i と $d(p_p)$ の間には非常に小さな線形の関係が見られた。

以上のことから、本論文で設定したモデル上では、インデックスファンドが市場の価格形成に与える影響はほとんどないと言えるだろう。

本実験の結果は、本質的に次の 2 つの仮定によるものであると考えられる。

- アクティブファンドのシグナルの正確さ、つまり σ_ε^2 の小ささが、ファンドの運用資産に依存せず一定であると仮定したこと
- アクティブファンドの効用関数に絶対的リスク回避度一定型を仮定したこと。

この 2 点を考慮すると結果が大きく変わりうる。インデックスファンドのシェアが大きくなったとき、前者はアクティブファンドの運用資産の減少によって、分析に使える資源が減り、受け取るシグナルが正確でなくなることを通じて、後者は正確な情報を持ったアクティブファンドがリスク資産への投資額を減少させることを通じて、市場価格と完全情報価格との乖離を大きくすると考えられる。

前者を考慮するには、 σ_ε^2 をアクティブファンドの総資産の大きさに反比例するように定めればよい。

後者を考慮するには、アクティブファンドの効用関数に相対的リスク回避度一定型効用関数を仮定すればよい。相対的リスク回避度一定型の効用関数を持つアクティブファンドの意思決定は、本モデルの絶対的リスク回避度一定型効用関数を持つア

クティブファンドの意思決定に比べて、計算資源を要すると考えられる。

当面の課題はこの 2 つの仮定を緩和したモデルの作成と実装である。

4. まとめ

インデックス投資が証券市場の価格形成に与える影響を見るために、証券市場のモデルを作成した。またそのモデル上での実験結果から、インデックス投資が価格形成にほとんど影響を与えていないことを示した。

今後はアクティブファンドの効用関数を相対的リスク回避度一定型に差し替え、またアクティブファンドの予測能力が運用資産に依存する構造をモデルに導入し、市場への影響の変化を分析したい。

参考文献

- [Jean- Pierre 07] Jean- Pierre Danthine, Donaldson, J. B.: 現代ファイナンス分析 資産価格理論、ときわ総合サービス (2007)
- [Sharpe 64] Sharpe, W. F.: Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *The journal of finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425–442 (1964)

A 付録

A1 最適化問題 (2) と最適化問題 (4) の等価性

最適化問題 (2) は、問題 (4) と等価である。これは次のようにして示せる。

$Z = \theta^T x_j$ とし、 Z の s_j の条件付き密度関数を $f_{Z|s_j}(z|s_j)$

とすると,

$$E \left[u_j \left(\theta_j^T x_j \right) \middle| s_j \right] = E \left[-\exp(-\rho Z) \middle| s_j \right] \quad (15)$$

$$= - \int e^{-\rho z} f_{Z|s_j}(z|s_j) dz \quad (16)$$

である. ここで, θ_j, s_j の両方が正規分布に従うことから, s_j のもとでの θ_j の条件付き分布は正規分布である. したがって, その期待値を $\bar{\theta}_j$, 分散を Σ_j とすると, $Z = \theta_j^T x_j$ の s_j のもとでの条件付き分布は, 期待値 $\bar{z} = \bar{\theta}_j^T x_j$, 分散 $\sigma^2 = x_j^T \Sigma_j x_j$ の正規分布である. これを用いると,

$$\begin{aligned} & - \int e^{-\rho z} f_{Z|s_j}(z|s_j) dz \\ &= - \int e^{-\rho z} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma^2}\right) dz \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-\bar{z}+\rho\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dz \\ & \quad \times \left(-\exp\left(-\rho\bar{z} + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2\right)\right) \end{aligned}$$

が得られる. この式の最右辺の被積分関数は, 期待値 $\bar{z} - \rho\sigma^2$, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数であるからその積分値は 1 である. ゆえに式 (2) は $-\exp\left(-\rho\bar{z} + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2\right)$ と等しい.

以上により式 (2) の最大化は, $-\exp\left(-\rho\bar{z} + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2\right)$ の最大化に帰着することがわかった. さらにすべての x_j と x'_j に対して,

$$-\exp\left(-\rho\bar{z} + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2\right) > -\exp\left(-\rho\bar{z}' + \frac{\rho^2}{2}\sigma'^2\right) \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\rho\bar{z} + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2\right) < \exp\left(-\rho\bar{z}' + \frac{\rho^2}{2}\sigma'^2\right) \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow -\rho\bar{z} + \frac{\rho^2}{2}\sigma^2 < -\rho\bar{z}' + \frac{\rho^2}{2}\sigma'^2 \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} - \frac{\rho}{2}\sigma^2 > \bar{z}' - \frac{\rho}{2}\sigma'^2 \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow \theta_j^T x_j - \frac{\rho}{2} x_j^T \Sigma_j x_j > \theta_j^T x'_j - \frac{\rho}{2} x_j'^T \Sigma_j x'_j \quad (21)$$

であるから, 最適化問題 (2) は別の最適化問題 (4) に帰着する.