







期待などは要請されず、したがって、エージェントが相互に最適化行動の解に従うという意味での毎期の「均衡」は担保されていない。

なお、ABM のエージェントのマイクロ状態  $X_t$  を集計することで  $K$  個のマクロ変数  $y_t \equiv \{y_{k,t}\}, k = 1 \dots K$  が定義されるとする。なお、このマクロ変数は観測可能なデータと対応することが想定される。

(式 2)

$$y_t = m(X_t).$$

式 1 と式 2 から以下のように、 $t+1$  期のマクロ変数に対する関係を導くことができる。

(式 3)

$$y_{t+1} = g(X_t, \Xi_t, \theta).$$

エルゴード性を持つマルコフ連鎖としての ABM が十分な期間  $t > T^*$  を経た長期では、一種の定常状態に到達しており、システムの状態は状態変数の初期条件  $X_0$ 、並びに、確率要素のランダム・シード  $s$  の影響から独立となる。この時、マクロ変数の定常状態が以下のように定義される。

(式 4)

$$y^* = E[y_t | t > T^*] = g^*(\theta).$$

また、現実に観察されるデータと ABM との関係は以下のように定式化される。

(式 5)

$$y_{t+1}^R = g^*(\theta^R, u_t).$$

ここで、 $u_t$  は、誤差ベクトルであり、実データと ABM シミュレーションによるマクロ変数値との差を生む要素（観測誤差 measurement error、モデル定式化誤差 specification error など）をすべてまとめたものとする。

### 3.2. ABM のベイズ推定

以上の表現体系の下で、パラメターの事前分布  $p(\theta)$  をモデルのデータへの尤度を用いて更新し、事後分布  $p(\theta | Y^R)$  を得るベイズ推定の方法は以下のように示される。

(式 6)

$$p(\theta | Y^R) \propto \mathcal{L}(\theta; Y^R) p(\theta).$$

ここで、パラメターの実データに対する尤度は  $\mathcal{L}(\theta; Y^R) \equiv p(Y^R | \theta)$  with  $Y^R \equiv \{y_t^R\}, t = 1 \dots T$  となる。特に、ABM の定常状態においては、現実のデータセットの値を観測する確率が、順序不問となり、以下のようにあらわされる。

(式 7)

$$\mathcal{L}(\theta; Y^R) \propto \prod_{t=1}^T f(y_t^R | \theta).$$

実際のベイズ推定では、パラメター値ごとに実データに対する尤度を計算する。その上で、尤度に応じてパラメターの事後分布を更新して収束させる、というステップが必要となる。

[Grazzini 17] は、ABM の各パラメターごとに尤度を計算する方法について、以下の 3 つの方法を提案している。

- 1) ノンパラメトリックな方法
- 2) パラメトリックな方法
- 3) Approximate Bayesian Computation (ABC)

1) のノンパラメトリックな方法は、各パラメター値  $\theta$  の下での ABM シミュレーションから、マクロ変数  $y_t(\theta)$  の経験密度分布を得てカーネル密度推定 (KDE) 等のスムージングを行い、その密度分布における実データ値  $y_t^R$  の出現確率によって尤度を評価する、というものである。

2) のパラメトリックな方法では、マクロ変数  $y_t(\theta)$  の定常状態  $y^*(\theta)$  周りのゆらぎ  $e_t$  が既知の分布関数（正規分布など）に従うと仮定し、実データとシミュレーション・データの誤差をその分布関数で評価して尤度を求める。

最後に、3) の ABC は、集団遺伝学に端を発した Likelihood-Free と呼ばれる折衷的方法であり、本研究の提案手法はこれを土台としている。パラメトリックな方法よりも柔軟な尤度関数の近似が可能であり、かつ、ノンパラメトリックな方法よりも計算コスト節約をできるという利点がある。具体的には、尤度関数を 1-0 の Indicator 関数で置き換える。Indicator 関数は、ABM が出力するシミュレーション・データと実データの距離が十分に近いと判断されれば 1、そうでなければ 0 を返すもので、以下の 3 段階で構成される。

- (i) 集約統計量  $\mu(\cdot)$  (summary statistics) の決定
- (ii) 距離尺度  $d(\mu, \mu^R)$  (distance measure) の定義
- (iii) 許容閾値  $h$  (tolerance threshold) の設定

その上で、ABC のアルゴリズムは次の 3 ステップの繰り返しとなる。

1. 事前分布から 1 組のパラメターベクトル  $\theta^i$  を抽出
2. パラメター  $\theta^i$  の下で、ABM シミュレーションを実施し、生成データ  $Y(\theta^i) \equiv \{y_t(\theta^i)\}, t = 1 \dots T$  を得る
3. 集約統計量を生成データ  $\mu(Y(\theta^i))$  と実データ

$\mu(Y^R)$ それぞれについて計算。距離が許容閾値の範囲内 $d(\mu, \mu^R) \leq h$ であれば $\theta^i$ を採用、さもなければ棄却する

ステップ3では、尤度の代わりとなる Indicator 関数によってパラメータの事後分布を更新しているが、その際の方法論（所謂、事後分布からのサンプリング）としては、Rejection sampling, Importance sampling, Particle Filter, MCMC などが提案されている。

実務的には、集約統計量の選定が最も困難であり、本質的に、SMD と同様の任意性が問題となる。例えば、平均にしか影響しないパラメータと分散にしか影響しないパラメータが同時に含まれるような場合、どちらのモーメントを集約等計量に選定したかで、パラメータの推定結果が大きく異なるだろう。

### 3.3. 判別器の敵対的学習による尤度近似

これに対して、提案手法の発想は、この ABC における Indicator 関数に相当する機構を、ニューラルネットを用いた判別器の Adversarial Training（敵対的学習）によって、データ適合的に構成しようということである。それによって、分析者が事前に (i) ~ (iii) の指定をすることなく、ABC 推定することが期待できる。

なお、Adversarial Training は、GAN ([Goodfellow 14]) や DC-GAN ([Radford 16]) など画像生成分野での成功により、近年注目を集めているが、時系列データに対する適用も進みつつある。

例えば、LSTM を Adversarial Training した研究として[Lamb 16]がある。その手法では、時系列データを生成する Generator と、その生成データと実データを比較して判別する Discriminator という2つのニューラルネットを用意する。そして、Generator は、Discriminator が実データと見間違えるような精度の高い理論値を生成するように学習され、Discriminator は実データと生成データをより正確に見分けるように学習される。こうした Adversarial Training のプロセスは、しばしば、きわめて精巧な偽物をつくる贋作家と、それを見破ることが使命の鑑定士との競争にも例えられる。

提案手法の具体的なプロセスは以下の通りである。すなわち、事前分布から抽出したパラメータ $\theta^i$ のうち、その下での ABM の生成データ $Y(\theta^i)$ が、判別器 (Discriminator) によって実データ $Y^R$ と見分けにくいと評価されたものほど重点的にリサンプルする（重いウェイトを置く）ことで、事後分布を更新する。

これに対して、判別器は、入力されたデータが、

実データのものか (1)、生成データのもの (0) かを、より正確に分類するように訓練されていく。

つまり、ABM のベイズ推定の側から見れば、ニューラルネットによる判別器を尤度関数の代わりとしており、また同時に、Adversarial Training の側から見れば、ABM を Generator の代わりとしている。

形式的には、以下のような目的関数を最大化するように判別器 $D(\cdot|\xi)$ のパラメータ $\xi$ が調整される。

(式 8)

$$C(\xi|\theta) = \mathbb{E}_{Y^R} [-\log D(Y^R|\xi)] + \mathbb{E}_{Y \sim g(\theta)} [-\log(1 - D(Y(\theta)|\xi))].$$

こうして学習された判別器 $D(\cdot|\xi, Y^R)$ を Indicator 関数として用いた ABC によって、AMB パラメータ $\theta$ の事後分布を更新する。

(式 9)

$$p(\theta|Y^R) \propto \mathcal{L}(\theta; Y^R)p(\theta) \\ \text{with } \mathcal{L}(\theta; Y^R) = \mathbb{E}_{Y \sim g(\theta)} [-\log D(Y(\theta)|\xi, Y^R)]$$

なお、具体的な判別器のニューラルネット構造には、様々なオプションがあり得る。本研究では、極力単純に、入力されるマクロ変数データの全体 (K 次元 T サンプル) を CNN で縮約した後、線形分類する判別器を用いた。

より複雑なアイデアでは、[Lamb 16]のように、事前に最尤法で実データを学習した LSTM に、実データと生成データの両方を入力し、その隠れ層の時系列を集約されたファクターと看做して判別器に入力する、というような方法も考えられる。ABM が生成するマクロ変数の数が大きく、また、時系列の順序情報も活用したい場合には、こうした隠れ層（潜在ファクター）に対する判別を行う利点も大きいと思われる。

## 4. 検証実験

### 4.1. 最小限の市場価格形成モデル

実験では、[Grazzini 17]に倣って、小規模の市場価格形成モデルを使用した。これは、[Cliff 97]によって提案された ABM であり、単一の商品について板情報（市場価格）を参照しながら自身の利ザヤ $\mu_{i,t}$ を調整して指値注文する売り手と買い手で構成される。詳しくは元論文を参照されたいが、簡潔にはエージェント $i$ の指値 $p_{i,t}$ が以下のように更新される。

(式 9)

$$p_{i,t+1} = (1 + \mu_{i,t+1})v_i,$$

$$\mu_{i,t+1} = \frac{p_{i,t} + \Delta_{i,t}}{v_i} - 1,$$

$$\Delta_{i,t} = \beta(\tau_{i,t} - p_{i,t}).$$

ここで、 $v_i$ はエージェント固有で時間不変の取引サイズ。また、 $\tau_{i,t}$ は各エージェントの公開されない目標価格で、直近の市場価格よりも高い場合には引き下げられ、低い場合には引き上げられる。各エージェントに共通のパラメータ $\beta$ は、目標価格と直近の発注価格の乖離にどの程度敏感に反応するかを決める感応度である。この値が高いほど、エージェントは他のエージェントの価格に敏感であり（相互作用が高い）、市場価格は伸縮的となる。

#### 4.2. シミュレーション・データによる推定法検証

実験では、この感応度パラメータ $\beta$ の推定を試みる。重要なことに、このABMにおいて、マクロ変数である市場価格の時間平均はパラメータ $\beta$ と単調な関係を持たない<sup>8</sup>。他方、その標準偏差には単調増加な関係がみられる（図1、図2）。よって、SMDやABCで推定を行う場合には、市場価格の標準偏差を集約統計量とすべきある。逆に言えば、集約統計量として市場価格の平均値を用いると、パラメータ空間に対して目的関数（尤度）がフラットとなって正確な推定は困難となる。

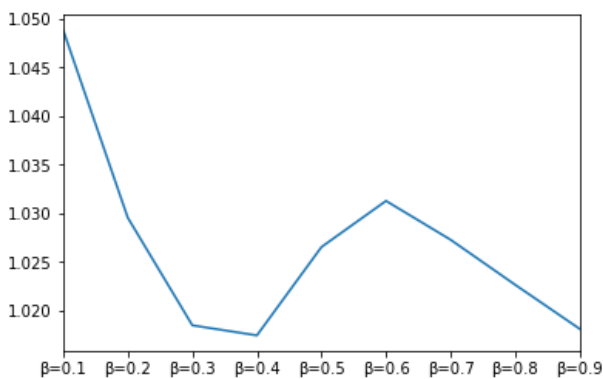


図1：市場価格の平均と $\beta$ の関係

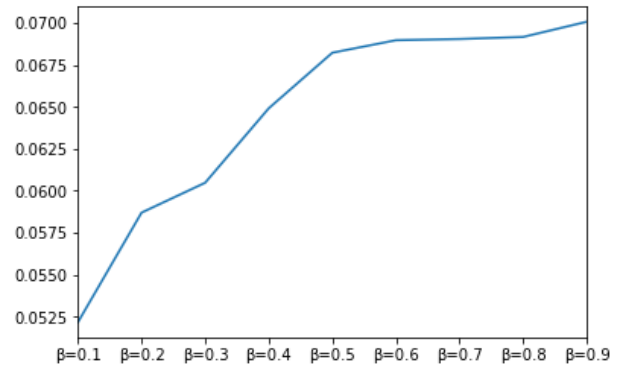


図2：市場価格の標準偏差と $\beta$ の関係

今回の小規模ABMでは推定すべきパラメータがひとつであり、マクロ変数のモーメントとの対応を事前に確認することができるので、集約統計量の選定に困難はない。しかし、前述の通り、推定したいパラメータが複数ある場合、どのような集約統計量を用いるのが最も識別に有利なのか、事前に明らかではない。

それに対して、本研究の提案手法は、そうした集約統計量を指定しないデータ適合的なアプローチである。したがって、提案手法を用いた以下の検証実験において、ある程度正確な推定が確認できれば、中規模のマクロ経済ABMのような、未知パラメータが複数あるモデルに対しても応用可能性が開けるだろう。

検証実験では、事前に指定した $\beta$ の値に基づきABMをシミュレートして得た市場価格を、疑似的な実データ( $Y^R$ )とする<sup>9</sup>。その上で、提案手法により推定した $\hat{\beta}$ が、疑似データ生成に使用した値 $\beta$ に十分近いことを確認する。

### 5. 結果の解釈と課題

実際に、 $\beta = \{0.1, 0.9\}$ の2つの指定値について、提案手法によって推定した結果が図3、図4である。なお、事後分布からのサンプリングにはParticle Filterを用いており、事前分布は一様分布 $U(0.0, 1.0)$ である。

<sup>8</sup>区間 $\beta \in (0.0, 1.0)$ について0.1刻み。パラメータ値1つについてABMシミュレーションを1000回実行し、その平均値を図示。

<sup>9</sup>エージェントの数は売り手・買い手ともに20、取引サイズは $v_i \sim \mathcal{N}(1, 0.1)$ で指定。シミュレーションの繰り返し期間は800期であり、その内、はじめの300期分は初期値の影響が残ると看做し破棄。

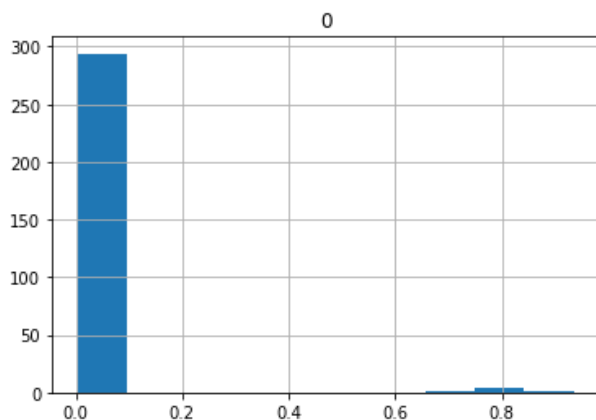


図 3 : 推定パラメータ $\hat{\beta}$ の事後分布  
( $\beta = 0.1$ の場合)

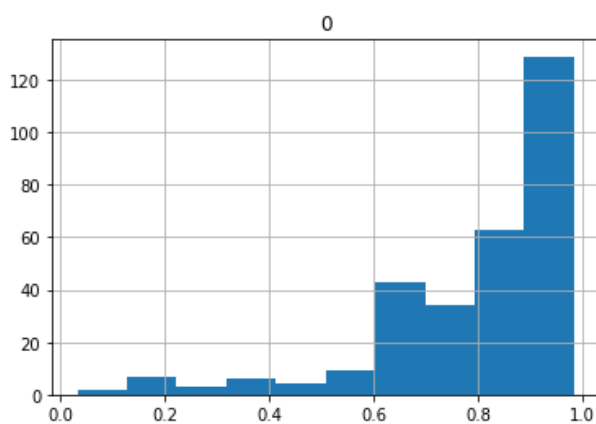


図 4 : 推定パラメータ $\hat{\beta}$ の事後分布  
( $\beta = 0.9$ の場合)

上図から分かるように、推定値 $\hat{\beta}$ の事後分布は、それぞれ 0.1 と 0.9 の近傍にピークをもっている。すなわち、SMD や ABC のように集約統計量を指定することなく、ニューラルネットの判別器が尤度の近似を成し、最低限必要な推定は行われたと言える。

しかし、事後分布の形状には縮退が生じており、不安定な結果であると言わざるを得ない。今回は、パラメータ数が一つであることと、計算リソースの都合上、Particle の数を 300 と小さく抑えていたため、縮退が強くなった可能性が高い。今後、推定パラメータ数が十数個に及ぶ中規模マクロ経済 ABM などの推定を行う場合には、10,000 程度のかかなり大きなパーティクル数が望ましいだろう。

また、判別器の Adversarial Training における反復 (Epoch) 数は、計算環境の都合上 100 回に抑えているが、望ましくは、Epoch 数の大小による事後分布の差を確認する必要があるだろう。

判別器の学習と、ベイズ推定による ABM パラメータの事後分布更新を同時進行するため、当然ながら、収束には相応の繰り返しが必要と考えられる。

仮説的な推論に過ぎないが、十分な収束を目指した場合、ノンパラメトリックなベイズ推定と比較した計算コストの削減効果は、パラメータが多い ABM でしか有益なものにならない可能性があるだろう。

総じて、本研究では、ABM のパラメータ推定における、Adversarial Training を応用したベイズ推定のアプローチに、一定の可能性が示唆されたと言える。

しかし、今回の実験では、計算リソースの限界から十分な検証が出来たとは言い難く、結果の解釈には注意が必要だと考える。今後の課題として、計算環境の改善や、より時間をかけた追検証を継続していきたい。また、主要な問題意識である中規模マクロ経済 ABM の実際の経済データによる推定についても、同時に取り組んでいきたいと考えている。

## 参考文献

- [Arouba 13] Arouba, S.B., and Schorfheide, F.: Macroeconomic Dynamics Near the ZLB: A Tale of Two Equilibria, *FRB of Philadelphia Working Paper*, No. 13-29 (2013), <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2294960>
- [Arouba 17] Arouba, S.B., Bocola, L., and Schorfheide, F.: Assessing DSGE Model Nonlinearities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Forthcoming (2017), <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2017.07.006>
- [Assenza 15] Assenza, T., Gatti, D.D., and Jakob, G.: Emergent dynamics of a macroeconomic agent based model with capital and credit, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.50, pp.5-28 (2017), <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2014.07.001>
- [Blanchard 16a] Blanchard, O.: Do DSGE Models Have a Future?, *Peterson Institute for International Economics POLICY BRIEF*, PB 16-11 (2016), <https://piie.com/system/files/documents/pb16-11.pdf>
- [Blanchard 16b] Blanchard, O.: Further Thoughts on DSGE Models, *Peterson Institute for International Economics REALTIME ECONOMIC ISSUES WATCH*, (2016), <https://piie.com/blogs/realtime-economic-issues-watch/further-thoughts-dsge-models>
- [Caiani 16] Caiani, A., Godin, A., Caverzasi, E., Gallegati, M., Kinsella, S., and Stiglitz, J.E.: Agent based-stock flow consistent macroeconomics: Towards a benchmark model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.69, pp.375-408 (2016), <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2016.06.001>
- [Carroll 17] Carroll, C., Slacalek, J., Tokuda, K., and Whilte, M.N.: The Distribution of Wealth and the Marginal Propensity to Consume, *Quantitative Economics*,



- Forthcoming (2017),  
<http://www.econ2.jhu.edu/people/ccarroll/papers/cstwMPC/>
- [Christiano 05] Christiano, L.J., Eichenbaum, M., and Evans, C.L.: Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *Journal of Political Economy*, Vol. 113, No.1 (2005),  
<http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/426038>
- [Cliff 97] Cliff, D., and Bruten, J.: Minimal-intelligence Agents for Bargaining Behaviors in Market Based Environments, *HP Laboratories Bristol*, HPL-97-91 (1997)
- [Coimbra 17] Coimbra, N., Rey, H.: Financial Cycles with Heterogeneous Intermediaries, *NBER Working Paper*, No. 23245 (2017),  
<http://www.nber.org/papers/w23245>
- [Gali 16] Gali, J.: Some Scattered Thoughts on DSGE Models, *mimeo*, (2016),  
[http://www.crei.cat/wp-content/uploads/2016/07/dsge\\_ebook.pdf](http://www.crei.cat/wp-content/uploads/2016/07/dsge_ebook.pdf)
- [Gallegati 09] Gallegati, M., and Richiardi, M.: Agent Based Models in Economics and Complexity, *Complex Systems in Finance and Econometrics*, (2009),  
[https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007%2F978-1-4419-7701-4\\_3](https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007%2F978-1-4419-7701-4_3)
- [Gelfer 16] Gelfer, S.: Financial Crises and Labor Market Dynamics: Evidence from a Data-Rich DSGE Model, *mimeo*, (2016),  
[https://docs.wixstatic.com/ugd/a9dfbd\\_d7c79b0040e44effbdeb17cdd47580c8.pdf](https://docs.wixstatic.com/ugd/a9dfbd_d7c79b0040e44effbdeb17cdd47580c8.pdf)
- [Ghoshadze 16] Ghoshadze, J., and Lux, T.: Bringing an Elementary Agent-Based Model to the Data: Estimation via GMM and an Application to Forecasting of Asset Price Volatility, *Journal of Empirical Finance*, Vol.37, pp.1-19, (2016),  
<https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2016.02.002>
- [Goodfellow 14] Goodfellow, I.J., Pouget-Abadie, J., Mirza, M., Xu, B., Warde-Farley, D., Ozair, S., Courville, A., Bengio, Y.: Generative Adversarial Networks, *mimeo*, (2014),  
<https://arxiv.org/abs/1406.2661>
- [Grazzini 15] Grazzini, J., and Richiardi, M.: Estimation of Ergodic Agent-Based Models by Simulated Minimum Distance, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.51, pp. 148-165 (2015),  
<https://doi.org/10.1016/j.jedc.2014.10.006>
- [Grazzini 17] Grazzini, J., and Richiardi, M.: Bayesian Estimation of Agent-based Models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.77, pp. 26-47 (2017),  
<https://doi.org/10.1016/j.jedc.2017.01.014>
- [Kaplan 16] Kaplan, G., Moll, B., Violante, G.L.: Monetary Policy According to HANK, *NBER Working Paper*, No. 21897 (2016),  
<http://www.nber.org/papers/w21897>
- [Keen 16] Keen, S.: Olivier Blanchard, Equilibrium, Complexity, And the Future of Macroeconomics, *Forbes* Oct 4 (2016),  
<https://www.forbes.com/sites/stevekeen/2016/10/04/olivier-blanchard-equilibrium-complexity-and-the-future-of-macroeconomics/3/#1aeab5b43e5f>
- [Kocherlakota 16] Kocherlakota N.: Toy Models, *mimeo*, (2016),  
<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxrb2NoZXJsYWtvdGEwMDI8Z3g6MTAyZmlzODcxNGZiOGY4Yg>
- [Korinek 15] Korinek A.: Thoughts on DSGE Macroeconomics: Matching the Moment, But Missing the Point?, *mimeo*, (2015),  
<https://www.ineteconomics.org/uploads/downloads/Korinek-DSGE-Macro-Essay.pdf>
- [Lamb 16] Lamb, A., Goyal, A., Zhang, Y., Zhang, S., Courville, S., Bengio, Y.: Professor Forcing: A New Algorithm for Training Recurrent Networks, *NIPS 2016 Accepted Papers*, (2016),  
<https://arxiv.org/abs/1610.09038v1>
- [Muellbauer 16] Muellbauer, J.: Macroeconomics and consumption: Why central bank models failed and how to repair them, *VOX Columns*, (2016),  
<http://voxeu.org/article/why-central-bank-models-failed-and-how-repair-them>
- [Radford 16] Radford, A., Metz, L., and Chintala, S.: Unsupervised Representation Learning with Deep Convolutional Generative Adversarial Networks, *ICLR2016 Accepted Papers*, (2016),  
<https://arxiv.org/abs/1511.06434>
- [和泉 03] 和泉 潔: 人工市場—市場分析の複雑系アプローチ, 森北出版 (2003),  
<https://www.morikita.co.jp/books/book/2239>