

約定価格の量子化ボラティリティモデル

Stochastic Volatility Model for Transaction data

森谷博之¹

¹ Quasars22 Private Limited

Abstract:

A financial market is a diversified dynamical system with many constraints, and price movements are modeled in terms of the micro properties of each transactions and the macro properties of dynamical systems. These two properties must be bridged by the multiplicity. The model focuses on the size of tick and the number of transactions with the price movement compared with the previous transactions and explains stochastic nature of short-term volatilities and persistently stable long-term volatilities as a results of unique behaviour of heterogeneous market participants.

1 はじめに

日経 225mini の先物市場では、取引が成立するとき、取引の最小単位、または呼び値の単位は 5 円と大阪取引所により規定されている。したがって、価格の動きは呼び値の単位の整数倍となる。また、実際の約定価格は、約定の度に価格が動く場合もあれば、価格が一定のまま約定が連続する場合もある。本稿では前者を緊急性取引、後者を非緊急性取引として分類する。多くの場合、緊急性の取引の数は、非緊急性の取引の数に比べて大幅に少ない。その前の約定価格と同じ価格で取引が成立する非緊急性取引の数は全体の 8 割近くに達する。マーケットメイカー (MM) が作り出すビット・アスク・バウンスの影響を受けた値動きも非緊急性取引と判断するとその数は 9 割を大きく超える。したがって、値動きを伴う緊急性を要する取引の数は、全体の数%にとどまる。

そこで本稿ではまずは緊急性の取引から生じる価格の動きに焦点を当てた。全ての動きを情報として維持するために、連続した緊急性取引の約定価格の差を 2 乗し、その累積和 (sum of squared price increments: sspi) を計算したところ、安定性していることが分かった。この累積和の特徴は特定の期間のリターンから算出したボラティリティに比べると、ランダムな価格の動きによる、価格変動の相殺という現象を排除できるところにある。

つぎに、市場に流動性を供給する MM は常に逆選択リスクに曝され、安定した収益の確保が難しく、かつ、投資家は、投資の開始時と終了時の取引費用の最小化に困難を見出している。そこで、緊急性取引から生じる価格の動きの特徴を調べてみたところ、将来の価格の動きはおおむね予測不能であることが分かった。ゆ

えに、このような状態に置かれた MM と投資家は、それぞれの投資行動を最適化するために活動し、その活動を通して、緊急性取引の数が極端に多くなり、また sspi が安定するのではないかとという仮説を考察した。

2 量子化ボラティリティモデル

日経 225mini の先物価格 (以後先物価格) の動きは

$$S(N) = S(0) + \sum_{n=1}^N x(n),$$

と書くことができる。ここで $x(n) = S(n) - S(n-1)$ 。 $S(0)$ は初期値、 $S(n)$ は n 番目 ($n = 1, \dots, N$) の約定価格である。 x はある確率過程に従うが、i.i.d. 確率変数であるとは限らない。

$x(n)$ は呼び値の単位 ξ_0 に正の整数 i を掛けた数値であり、その方向性はプラスにもマイナスにも動く。 ξ は $i, i = 1, 2, \dots, I$ によりラベル付けされている。そして、

$$\xi_{\delta,i} = \delta \cdot \xi_0 \cdot i,$$

と表される。ここで δ が +1 のときに、上昇を、 -1 のときに下落を表す。 $\xi_{\delta,i}$ を約定価格差と呼ぶ。 $i = 0$ のとき、その取引は非緊急性取引と分類される。また、緊急性取引は $i \neq 0$ と定義される。従って、緊急性取引の価格差の集合は

$$\Xi = \{\xi_I\} = (-\xi_I, \dots, -\xi_i, \dots, -\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_I),$$

で与えられる。ゆえに $x(n) \in \Xi$ 。

ここで平方価格差をつぎのように定義する。

$$e_i = \xi_{\delta,i}^2 = (\delta \xi_0 \cdot i)^2,$$

そして、その集合は

$$\Psi = \{e_I\} = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_I).$$

で与えられる。

N 個の取引のあるときの、平方価格差の累積和 (the sum of squared price increment:sspi) を

$$E = \sum_{n=1}^N x(n)^2,$$

と書く。 $x(n)^2$ は e_i の中のひとつをとる、または $x(n)^2 \in \Psi$ である。

2.1 配位、緊急取引の数、そして平方価格差の和の分布

配位は、連続した N 個の緊急取引の i でラベル付けされた平方価格差の数を頻度として表現していて、それは確率論でいう古典的占拠問題 (occupancy problem) と同じである。

配位は

$$\{N_I\} = (N_1, \dots, N_i, \dots, N_I),$$

と表現される。ここで、 N_i は i でラベル付けされた緊急取引の数であり、 N_I は最も大きな平方価格差の数である。従って、 $N = \sum_{i=1}^I N_i$ が成り立つ。 N の数が十分に大きく、 E が一定であるという前提の下では、 N_i の分布は

$$\frac{N_i}{N} = \frac{e^{-be_i}}{Z(I, b)},$$

で与えられる [?]。ここで、 $Z(I, b)$ は分配関数、または状態和と呼ばれるもので、 $\sum_{i=1}^I e^{-be_i}$ で与えられる。 b はラグランジュ乗数であり、 e_i の平均値の逆数に相当する。

つぎに、この配位の分布から無作為に $N^{(k)}$ 個取り出し、その和 E_j を求めてみる。 e_i は指数分布にしたがうのであるから、その和である $E_j, j = 1, \dots, J$ はガンマ分布に従う。 E_j は

$$P(E_j, N^{(k)}, b) = \frac{b^{N^{(k)}} E_j^{N^{(k)}-1} \exp(-bE_j)}{\Gamma(N^{(k)})}$$

で与えられる。ここで、 $\Gamma()$ ガンマ関数である。また、 $N^{(k)} \in (0, \dots, k, \dots, N)$ である。それぞれの $N^{(k)}$ 個の取引は、 E_j の分布の形状を特定し、 b はスケールパラメータ、 $N^{(k)}$ は形状のパラメータである。

$N^{(k)}$ が十分に大きく成れば、 E_j の分布は正規分布で近似できる。

2.2 時間間隔、緊急取引の数、そして平方価格差の和の分布

つぎに、平方価格差の和を緊急取引の数で特定するのではなく、時間間隔で特定してみよう。その際には、時間間隔当たりの緊急取引の数は変動する。緊急取引の数と平方価格差の和の関係は

$$P(E_j, J, \beta) = \frac{M_j}{M} = \frac{\exp(-\beta E_j)}{Z(J, \beta)}, \quad (1)$$

で与えられる [?]。ここで、 $Z(J, \beta) = \sum_{j=1}^J \exp(-\beta E_j)$ であり、 β はラグランジュ乗数であり、 $1/\bar{E} = M/E$ で与えられる。

3 データ分析

分析データは、2016年1月から2017年4月までの日経225miniの約定価格データを用いた。それぞれの期間と分析に用いた限月は表??の通りである。

表 1: 日経 225 ミニ 分析期間と限月

年月	限月
201601	2016年3月限
201602	2016年3月限
201603	2016年6月限
201604	2016年6月限
201605	2016年6月限
201606	2016年9月限
201607	2016年9月限
201608	2016年9月限
201609	2016年12月限
201610	2016年12月限
201611	2016年12月限
201612	2017年3月限
201701	2017年3月限
201702	2017年3月限
201703	2017年6月限
201704	2017年6月限

3.1 ビッド・アスク・バウンス効果と緊急取引

マーケットメイカーの役割は市場に流動性を供給することである。しかし、マーケットメイカーは、情報の非対称性の問題を抱えていて、時として逆選択の状態

に陥ってしまう[?].このような問題の解決策の1つとして、マーケットメイカーは取引の高速化により、極力短い期間で確実に収益を上げる取引を繰り返し、そこから得られる収益で、逆選択で生じた損失を補うという戦略を採用している[?].しかし、このような取引戦略では、最良買値と最良売値の間で多くの取引が約定し、それが価格の動きに負の自己相関をもたらしてしまう。このような現象をビッド・アスク・バウンス (BAB) という。このような取引から生じる負の自己相関は、緊急性取引の分析に偏りをもたせる可能性がある。従って本稿の分析ではこのような値動きも非緊急性取引と分類し、緊急性取引とは別の取引とした。表??は各取引の数を示している。非緊急性取引が全体の取引の9割5分を超えている。また、マーケットメイクに伴う、またはビッド・アスク・バウンス効果を生み出す取引は緊急性取引の5倍前後となる。

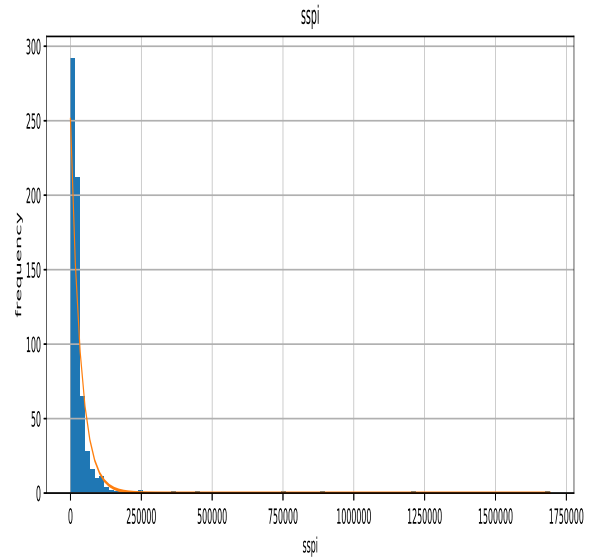
表 2: 各種取引の数

年月	全取引	非緊急性	緊急性	BAB
201601	3,137,278	3,012,221	124,102	568,114
201602	3,189,848	3,076,035	112,821	557,071
201603	1,408,362	1,362,491	45,115	228,067
201604	2,255,747	2,195,408	59,325	369,885
201605	1,575,588	1,539,075	35,576	245,469
201606	1,746,743	1,679,812	66,123	291,488
201607	2,973,356	2,898,793	57,089	292,719
201608	3,523,295	3,453,095	27,757	219,453
201609	2,512,357	2,463,202	22,897	151,000
201610	2,751,476	2,694,886	17,218	157,523
201611	4,275,559	4,196,766	42,161	258,711
201612	2,638,139	2,586,687	21,722	150,247
201701	3,727,576	3,662,157	29,855	217,559
201702	3,611,064	3,547,905	26,376	201,783
201703	2,727,687	2,680,420	19,544	151,320
201704	3,806,572	3,748,768	23,908	215,889

3.2 平方価格差の和の安定性

日経 225mini の取引は日中立会 (8:45-15:15) と、ナイトセッション (16:30-翌日 5:30) の2つの立会で行われる。それぞれの立会について平方価格差の和を算出した。緊急性取引の数が十分にあり、累積平方価格差 (E) が大きな N に対して一定であれば、各立会で算出された平方価格差の和 (E_j) の分布は、式 (??) で与えられる分布と整合性があるはずである。得られた結果をヒストグラムに表わしたのが図??である。

図 1: 平方価格差の和の分布



非常に良い当てはまりを見せている。この期間には、BREXIT とトランプの大統領選挙の勝利、そして、9回の日銀政策決定会合があり、そのつど平方価格差の和には大きな影響を与えた。しかし、その動きは式 (??) で与えられる範囲を超えるものではなかった。

3.3 緊急性取引に伴う値動きのランダム性

??節の結果から予想されるように、緊急性取引の価格の動きはランダムである可能性が高い。そこで、連検定、ダービン・ワトソンの検定を用いて、緊急性取引の価格の動きのランダム性を調べてみた。

日中立会の取引時間を 8:45-9:00, 9:00-10:00, 10:00-11:00, 11:00-12:00, 12:00-13:00, 13:00-14:00, 14:00-15:00, 15:00-15:10 に分け、またナイトセッションの立会時間を 6:30-17:00, 17:00-18:00, 18:00-19:00, 19:00-20:00, 20:00-21:00, 21:00-22:00, 22:00-23:00, 23:00-24:00, 0:00-1:00, 1:00-2:00, 2:00-3:00, 3:00-4:00, 4:00-5:00, 5:00-5:25 に分割し、22の時間帯に分け、それぞれの時間帯で30個以上の緊急性取引が観測されたときに、これら2つの検定を施した。

3.3.1 連検定

連検定はノンパラメトリックな無規則性の検定 [?] である。

H_0 : 緊急性取引の価格の動きには規則性はない。 H_1 : 緊急性取引の価格の動きには規則性がある。として検定を行い、p-値が 0.1 より大きければ帰無仮説を棄却できないと判断した。結果は表??に示した。数値は帰無仮説を棄却できなかった割合である。全体では 6 割弱の時間枠で無規則性が観測された。

3.3.2 ダービン・ワトソン (DW) の検定

ダービン・ワトソンの検定は回帰分析の残差の系列相関の分析に用いられる [?]。ここでは緊急性取引の価格の動きには系列相関がないを帰無仮説とする。ダービン・ワトソン比が 1.5 から 2.5 の間にあるとき、帰無仮説を棄却できないと判断する。表??の結果は帰無仮説を棄却できない割合である。多くの時間枠で系列相関は見られなかった。

表 3: 無規則性の検定結果

年月	30 以上	30 未満	連検定	DW 検定
201601	320	1	0.54	0.99
201602	327	1	0.45	0.98
201603	326	42	0.59	0.88
201604	342	7	0.57	0.92
201605	283	27	0.56	0.86
201606	324	46	0.71	0.98
201607	322	44	0.48	0.77
201608	268	159	0.54	0.77
201609	223	177	0.75	0.91
201610	199	201	0.60	0.67
201611	302	98	0.55	0.67
201612	245	188	0.73	0.93
201701	284	83	0.65	0.92
201702	283	117	0.61	0.83
201703	210	230	0.53	0.66
201704	247	166	0.55	0.75

連検定、ダービン・ワトソン検定の結果、緊急性取引の値動きには多くの場合に規則性が発見できなかった。

4 観察結果の考察

??、??節の結果から緊急性取引の多くの値動きから規則性は発見されなかった。従って、マーケット・メイカーにとっても安定的に利益を上げることは難しく、また投資家がポジションを取る場合、またはポジションを閉じる場合にも、それに伴う費用の削減は易しくないことが分かる。このような状況の下で、市場では多

くの市場参加者が、それぞれの目的を達成するために、それぞれの行動を切磋琢磨し、多重度の上昇を接点として市場に安定をもたらしていると考えられる。その結果として累積平方価格差と平方価格差の和は長期的には安定し、短い時間間隔では、その時々起きた予期せぬ事象を吸収するために、平方価格差の和は、急激な上昇を示すと考えられる。

参考文献

- [1] Moriya,H.:Quantized price volatility model for transaction data,' *Evolutionary and Institutional Economics Review* (2017) <https://doi.org/10.1007/s40844-017-0078-1>
- [2] Cartea,A., and Penalva,J.: Where is the value of high frequency trading?, *Quarterly Journal of Finance* 2(3) September(2012)
- [3] Bouchard,B.,Dang,N-M., and Lehalle,C-A. :Optimal control of trading algorithms- a general impulse control approach, *SIAM Journal on Financial Mathematics* 2(1)403-438(2011)
- [4] 武藤真介: 統計解析ハンドブック、朝倉書店 (1995)