

Volatility-constrained correlation を用いた金融市場間の 影響伝播の解析

Analysis of influence among financial markets using volatility-constrained correlation

落合友四郎^{1*} ホセ・ナチエル^{2*}
Tomoshiro Ochiai¹ Jose C. Nacher²

¹ 大妻女子大学社会情報学部

¹ Faculty of Social Information Studies, Otsuma Women's University

² 東邦大学理学部

² Faculty of Science, Toho University

Abstract: Recent financial crises have shown the importance of determining the directionality of the influence between financial assets in order to identify the origin of market unstabilities. Here, we analyze the correlation between Japan's Nikkei stock average index (Nikkei 225) and other financial markets by introducing a volatility-constrained correlation metrics. The asymmetric feature of the metrics reveals which asset is more influential than the other. As a result, this method allows us to unveil the directionality of correlation effect, which could not be observed from the standard correlation analysis. Furthermore, we present a theoretical model that reproduces the results observed in empirical analysis.

1 はじめに

時系列データから資産価格の間の相関を求めるとき、いわゆる通常のピアソン相関係数 (Pearson product-moment correlation coefficient) が用いられることが多い。ところが、通常の相関係数では、相関の有無はわかっても、その方向性まではわからない。そこで、我々は Volatility-Constrained-Correlation と呼ぶ新しいタイプの相関を計測する手法を開発した。この Volatility-Constrained-Correlation を用いることにより、2つの要素の間の相関のみならず因果の方向性まで検出することができるようになった。この手法を、NYダウ平均株価、日経平均株価、およびドル円為替レートの過去データに用いて、影響伝播の方向性について解析した。

2 提案方法

$P_i(t)$ ($i = 1, 2$) を金融資産 i の時刻 t ($t_i \leq t \leq t_f$) における価格としよう。すると logarithmic price return は以下で定義される。ここで、 t_i と t_f は、データセッ

トの最初および最後の時刻である。

$$R_i(t) = \ln P_i(t+1) - \ln P_i(t).$$

すると、平均、標準偏差は通常通り以下で定義される。

$$E(R_i(t)) = \frac{1}{(t_f - t_i)} \sum_{t_i \leq t < t_f} R_i(t),$$

$$\sigma(R_i(t)) = \sqrt{\frac{1}{(t_f - t_i)} \sum_{t_i \leq t < t_f} (R_i(t) - E(R_i(t)))^2}.$$

さらに、2つの資産価格 $\{(R_1(t), R_2(t))\}$ ($t_i \leq t < t_f$) に対して、相関係数 (Pearson product-moment correlation coefficient) は以下で定義される。

$$C(R_1(t), R_2(t)) = \frac{1}{(t_f - t_i)} \times \sum_{t_i \leq t < t_f} \frac{(R_1(t) - E(R_1(t))) (R_2(t) - E(R_2(t)))}{\sigma(R_1(t)) \sigma(R_2(t))}.$$

金融市場では、2つの金融資産が相関するのは頻繁に観察される。さらに、資産1から資産2への影響の強さが、その逆方向(資産2から資産1)の影響の強さと異なることも良く観察される。そこで、この現象をとらえるために、以下のように volatility-constrained correlation と呼ぶメトリックを導入する。

*連絡先: E-mail: ochiai@otsuma.ac.jp
E-mail: nacher@is.sci.toho-u.ac.jp

一般に Ω を、時系列 $\{t | t_i \leq t < t_f\}$ の部分集合としよう。この部分時系列 Ω に対して、フィルター（制限）された平均、標準偏差、相関係数を以下で定義しよう。

$$E(R(t), \Omega) = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{t \in \Omega} R(t),$$

$$\sigma(R(t), \Omega) = \sqrt{\frac{1}{\#\Omega} \sum_{t \in \Omega} (R(t) - E(R(t), \Omega))^2},$$

$$C(R_1(t), R_2(t), \Omega) = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{t \in \Omega} \frac{(R_1(t) - E(R_1(t), \Omega))}{\sigma(R_1(t), \Omega)} \times \frac{(R_2(t) - E(R_2(t), \Omega))}{\sigma(R_2(t), \Omega)},$$

ここで、 $\#\Omega$ は、 Ω の要素の数である。

時系列部分集合 Ω の特別な場合として、以下のようによく。

$$\Omega_{[t_1, t_2; \alpha, \beta]} = \{t \in [t_i, t_f] \mid t_1 \leq t < t_2 \text{ and } \alpha \cdot \sigma(R_1(t)) \leq |R_1(t)| < \beta \cdot \sigma(R_1(t))\},$$

ここで、 $t_i \leq t_1 < t_2 \leq t_f$ である。

そこで、次のように volatility-constrained correlation を定義する。

$$F[\alpha, \beta](s) = C(R_1(t), R_2(t), \Omega_{[s, s+\Delta s; \alpha, \beta]}),$$

言い換えると、volatility-constrained correlation $F[\alpha, \beta](s)$ は、一方の資産の $|R_1(t)|$ が特定のレンジに制限されているときの $(\alpha \cdot \sigma(R_1(t)) \leq |R_1(t)| < \beta \cdot \sigma(R_1(t)))$ 、2つの金融資産 $(R_1(t), R_2(t))$ の間の特定時期の相関係数を表す。制限を課す方の資産（影響の起点となる方） $R_1(t)$ を base asset と呼ぶことにする。

今回は、期間幅 Δs は、半年とする。 $F[\alpha, \beta](s)$ は、 $R_1(t)$ のボラティリティによって制限された相関係数であり、もし、二つの資産 $R_1(t)$ と $R_2(t)$ を交換すると、 $F[\alpha, \beta](s)$ は異なる値をとる。いいかえると、この定義は、2つの資産 $R_1(t)$ and $R_2(t)$ の交換について非対称である。この非対称性は、2つの資産価格間の影響の方向性を検知するのに重要な役割を果たす。

3 解析結果

最初に、ドル円為替レートと日経平均株価の日足データでの相関を解析していく。この場合、Base asset を $R_1(t)$ としては、次の2つの可能性がある。

- (i) $R_1(t)$ がドル円為替レート
- (ii) $R_1(t)$ が日経平均株価

相関に対するボラティリティの実質的な効果を得るために、 $F[1, \infty]$ と $F[\frac{3}{2}, \infty]$ および C に対して、 $Z(x) = (1/2) \log((1+x)/(1-x))$ で定義される Fisher's Z transformation を適用する。 $F[1, \infty]$, $F[3/2, \infty]$ と C に、Fisher's Z transformation をしたものを、 $Z_1, Z_{3/2}, Z_C$ とかく。すると、 $Z_1 - Z_C$ と $Z_{3/2} - Z_C$ は、相関に対するボラティリティのネット効果と考えることができる。

Fig. 1 において、base asset に対する非対称性の効果を図示した。この図をみると、Base asset がドル円為替レートの時の相関にたいするボラティリティの実質効果 $Z_1 - Z_C$ and $Z_{3/2} - Z_C$ は、平均的に Base asset が日経平均株価の時よりも強いことがわかる。この結果に対する検定として、Welch's test を用いた時の、two-tailed P-value は、それぞれ、 $Z_1 - Z_C$ に対しては 0.018、 $Z_{3/2} - Z_C$ に対しては、0.057 である。

このことから、ドル円のボラティリティは、日経平均のボラティリティよりも、よりいっそう強くその2つの資産の相関に寄与することがわかる。つまり、ドル円と日経平均の間では、ドル円から日経平均への影響の方が、その逆の影響よりも強いことがわかる。

同様に、米国ダウ平均株価 (DJIA) と、日経平均株価 (始値) の相関についても解析した。Fig.3 と Fig.4 に、base asset が、DJIA と、日経平均 (open) の場合の相関にたいするボラティリティの実質効果 $Z_1 - Z_C$ と $Z_{3/2} - Z_C$ をそれぞれ図示した。図をみると、ダウ平均の方が、日経平均よりも、影響力が強いことがわかる。この結果に対する検定として、Welch's test を用いた時の、two-tailed P-value は、それぞれ、 $Z_1 - Z_C$ に対しては 0.0079、 $Z_{3/2} - Z_C$ に対しては、0.054 である。

ダウ平均が日経平均よりも影響力が大きいことは、世界経済の力関係から容易に理解できる。アメリカ経済は、日本経済よりも大きく、2012年の統計では、GDPでアメリカ経済は、日本の2.6倍であり、市場資本の大きさでは5.4倍も大きい。また、アメリカ経済は、全世界の市場資本の35.9%を占めている。

また、米国ダウ平均株価と、日経平均株価 (終値) の相関についても解析した。先ほどは日経平均の始値を用いたが、次は終値を用いて解析した。Fig.5 と Fig.6 に、base asset が、DJIA と、Nikkei 225 (終値) の場合の相関にたいするボラティリティの実質効果 $Z_1 - Z_C$ と $Z_{3/2} - Z_C$ をそれぞれ図示した。図をみると、ダウ平均の方が、日経平均 (終値) よりも、影響力が強い

ことがわかる。

さらにこの効果は、日経平均データで始値を用いた結果よりも、さらに強いことがわかる。このことは、時間の因果関係を考慮に入れれば、自然に理解できる。つまり、日本市場の closing time は、日本市場の opening time もしくはアメリカ市場のそれに比べて、半日位遅れているので、時間的な因果律が効果としてあわられていても不思議ではない。

4 理論モデルとシミュレーション

多変数 ARCH モデルを参考に、このデータ解析結果を再現するようなモデルを提案する。 $(R_1(t), R_2(t))$ を、共分散 $D_{ij}(t)$ 、期待値ゼロとなるような 2 次元ランダム変数 (Gaussian) とする。この共分散行列は、時間依存性があり、次式に従うものとする。

$$\begin{aligned} D_{11}(t) &= w_1 + \alpha_1(R_1(t-1))^2 \\ D_{22}(t) &= w_2 + \alpha_2(R_2(t-1))^2 \\ D_{12}(t) &= w_{12} + \beta_1(R_1(t-1))^2 + \beta_2(R_2(t-1))^2 \end{aligned}$$

ここで、 $w_1, w_2, w_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は自由パラメーターである。さらに、 $(D_{12}(t))^2 > D_{11}(t)D_{22}(t)$ の時、共分散行列を positive definite にするために、最後の式の代わりに、 $D_{12}(t) = \sqrt{D_{11}(t)D_{22}(t)}$ とする。

以後、 $\beta_2 = 0$ とする。すると、共分散 $D_{12}(t)$ は、資産 2 には依存せず、資産 1 のボラティリティのみに依存することになる。つまり、資産 1 の log return $R_1(t-1)$ がおおきくなると、相関は増加する。一方、資産 2 の log return $R_2(t-1)$ がおおきくなくても、相関は変化しない。それゆえ、このモデルでは、影響の方向性は、資産 1 から資産 2 ということになる。

このモデルを用いて、パラメーターを $w_1 = 0.00005$, $w_2 = 0.00005$, $w_{12} = 0.00003$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0$ とし、シミュレーションを行った。この結果は、Fig.7 と Fig.8 に図示した。この図をみると、シミュレーション結果は、実データ解析の結果とよく一致していることがわかる。

5 むすび

今回、ボラティリティからの観点で金融資産間の相関について解析した。volatility-constrained correlation を導入し、相関の影響の方向性について調べた。それによると、日経平均は、ドル円や米国ダウ平均から、その逆方向よりも強い影響を受ける。このことは、日本

と米国の経済規模の大きさから自然と理解できるであろう。また、ボラティリティが大きくなると、相関も大きくなることが、同時に観察することもできる。今後の研究として、他の株、債券、為替市場の資産間の影響の方向性をしらべて、金融危機の引き金となるような資産を同定することなどが重要になる。

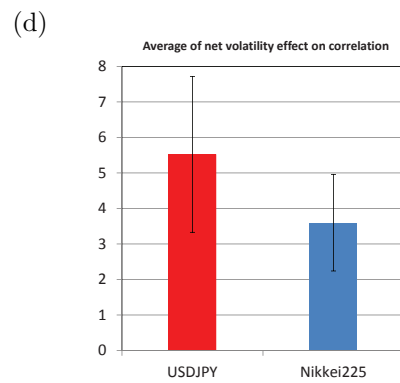
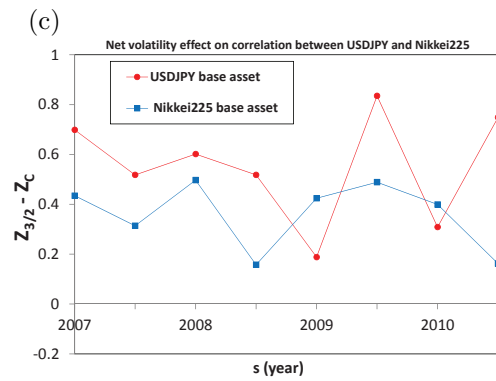
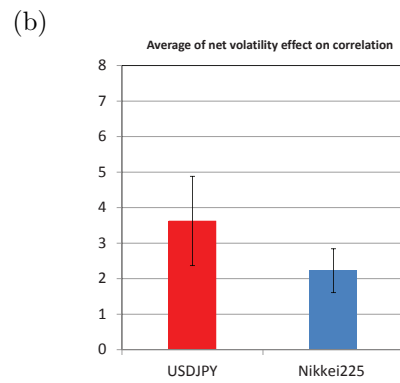
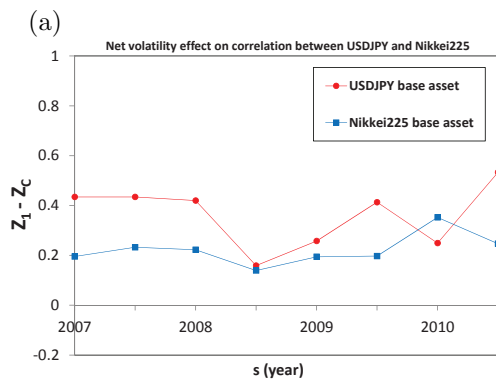
謝辞

This work was supported by Otsuma Grant-in Aid for Individual Exploratory Research (Grant Number S2609)

参考文献

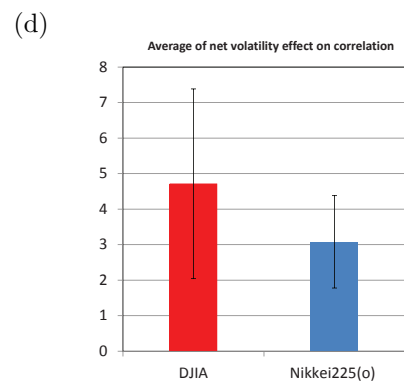
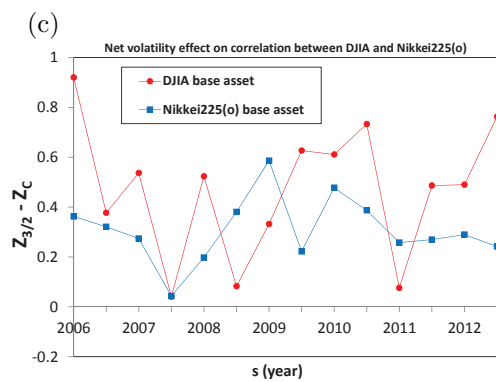
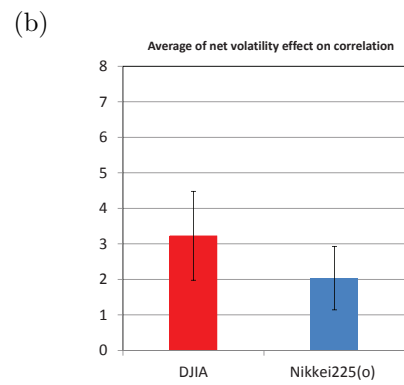
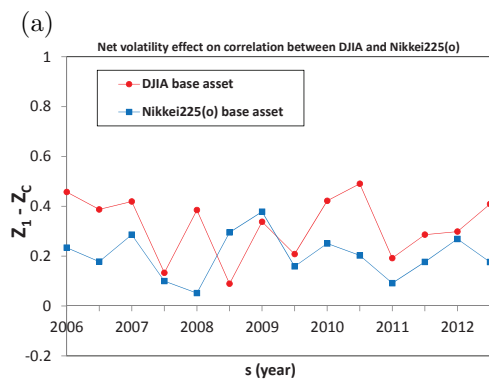
- [1] R. N. Mantenga and H. E. Stanley, *An introduction to Econophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000).
- [2] T.Mizuno, S.Kurihara, M.Takayasu and H. Takayasu, *Physica A* **324**, 296 (2003).
- [3] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.K. Peng and H.E. Stanley, *Physica A* **245**, 437 (1997).
- [4] P. Cizeau, Y. Liu, M. Meyer, C.K. Peng, and H.E. Stanley, *Physica A* **245**, 441 (1997).
- [5] J.C. Nacher and T. Ochiai, *Phys. Rev. E* **85**, 056118 (2012).
- [6] T. Ochiai, J.C. Nacher, *Physica A*, **393**, 364(2014)
- [7] F. Garzarelli, M. Cristelli, A. Zaccaria and L. Pietronero, arXiv:1110.5197v1 [q-fin.ST].
- [8] J. M. Pollet and M. Wilson, *Journal of Financial Economics*, Vol. **96**, Issue 3, 364 (2010).
- [9] L. Sandoval and I. D. P. Franca, *Physica A* **391**, 187 (2012).
- [10] T. Preis, D. Y. Kenett, H. E. Stanley, D. Helbing and E. Ben-Jacob, *Scientific Reports* **2**, 752 (2012).
- [11] Y.Shapira, D. Y. Kenett, and E. Ben-Jacob, *European Physical Journal B* **72**, 657 (2009).
- [12] D. Wang, B. Podobnik, D. Horvatic, H. E. Stanley, *Physical Review E* **83**, 046121 (2011).

- [13] B. Podobnik, D. Wang, D. Horvatic, I. Grosse, H. E. Stanley, *Europhysics Letters* **90**, 68001 (2010).
- [14] S. Sinha, A. Chatterjee, A. Chakraborti and B. K. Chakrabarti, *Econophysics: An Introduction*, Wiley-VCH, 2010
- [15] J.-i. Maskawa, J. Murai and K. Kuroda, arXiv:1306.2188 (to appear in *Evolutionary and Institutional Economics Review* special issue).



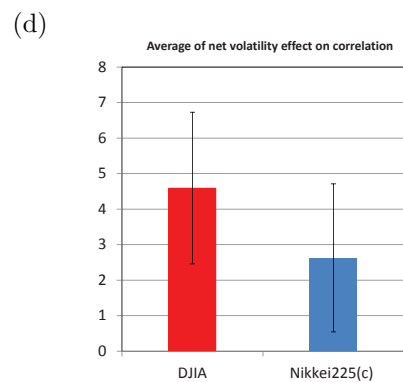
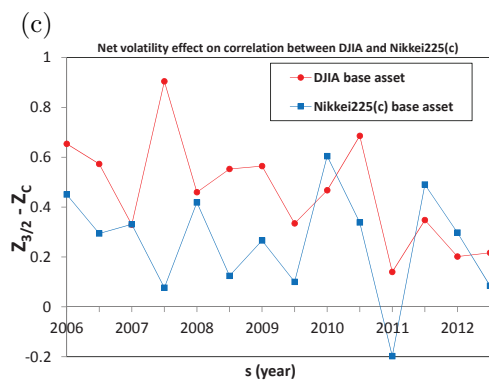
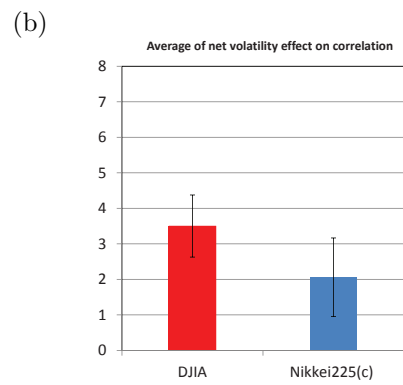
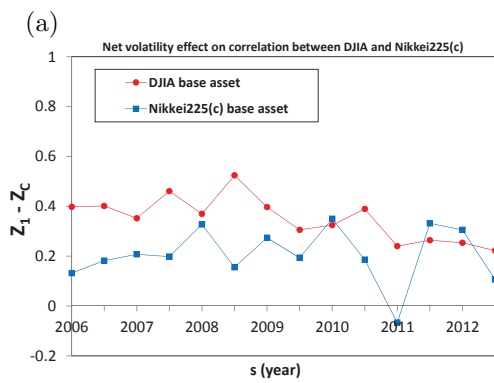
⊠ 1: Net volatility effect on correlation between USDJPY and Nikkei 225.

⊠ 2: The average of the net volatility effect on correlation between USDJPY and Nikkei 225.



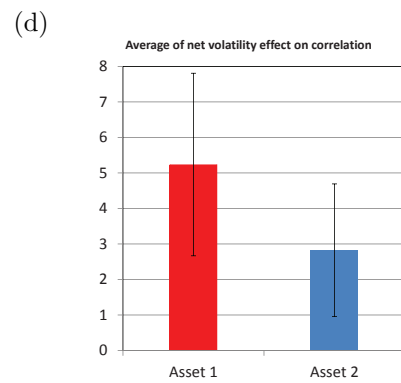
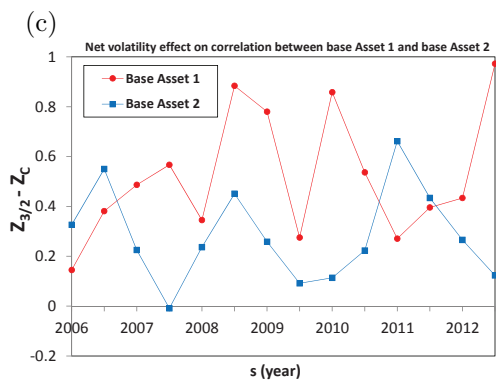
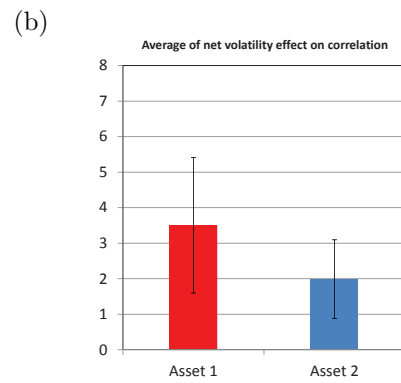
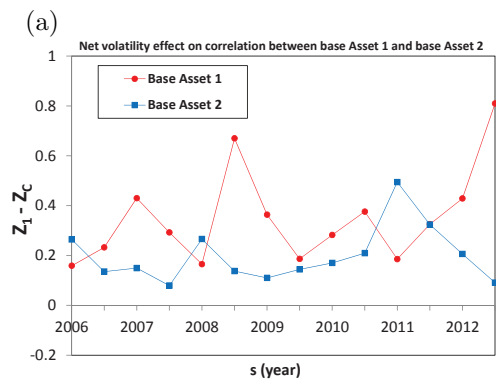
☒ 3: Net volatility effect on correlation between Nikkei 225(open) and DJIA.

☒ 4: The average of the net volatility effect on correlation between Nikkei 225(open) and DJIA.



☒ 5: Net volatility effect on correlation between Nikkei 225(close) and DJIA.

☒ 6: The average of the net volatility effect on correlation between Nikkei 225(close) and DJIA.



☒ 7: Net volatility effect for the correlation of the simulated data

☒ 8: The average of the net volatility effect for the correlation of the simulated data