

スプレッドに着目した確率的板モデルによる 株価変動のハースト指数の再現

Simulation of Stock Price Dynamics by Statistical Order-Book Model

with Bid-Ask Spread Effect

宮崎文吾^{1*} 和泉潔^{1,2} 山田健太^{1,3}

Bungo MIYAZAKI¹, Kiyoshi IZUMI^{1,2} and Kenta YAMADA^{1,3}

¹ 東京大学大学院工学系研究科

¹Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

² 科学技術振興機構 CREST

² CREST, JST

³ 科学技術振興機構 PRESTO

³ PRESTO, JST

Abstract: We constructed a basic order-book model which is based on the Maslov model and includes some empirical results such as distributions of order volume. Although this basic model successfully reproduces power law distributions of price changes, the market price greatly oscillates and the Hurst exponent, which indicates randomness of price fluctuation, of this model is much smaller than that of real data. In order to resolve this problem, we revised the basic order-book model by adding the effect that the selection probability of order types (i.e. market order, limit order and cancel) depends on the bid-ask spread. Our revised model still reproduces power law distributions of price changes and the Hurst exponent is improved.

1 はじめに

金融市場における価格変動や流動性といった様々な性質を再現するモデルとして、確率的板モデルの研究が行われている。金融市場における「板」とは、図 1 のように、ある価格における待ち状態（売り・買いがマッチせずまだ取引が成立していない）の注文株数をまとめたものであり、「確率的板モデル」とは板に出入りする注文による板形状の変動を確率的にモデル化したものであり、板を用いた価格形成メカニズム（連続ダブルオークション）から生じる価格変動や流動性の変化などを分析することができる。

本研究では、注文の確率的な生成について現実の市場から抽出したパラメータを適用し、そのモデルから生成される価格変動の特徴について考察する。また、注文のタイプ¹の選択確率が板の状況によらな

いモデルに対し、それがスプレッド（最も安い売り注文価格と最も高い買い注文価格の差）によって変動するような戦略（インテリジェンス）を導入し、価格変動の特徴がどのように影響されるか考察する。

売気配株数 (株)	気配値 (円)	買気配株数 (株)
1,000	1010	
500	1005	
	1000	
	995	2,000
	990	1,400

図 1 板の例

E-mail: B2012b.miyazaki@socsim.org

*連絡先：東京大学大学院工学系研究科
システム創成学専攻 和泉研究室
〒113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1 工学部 8 号館 530

¹ 本研究では指値注文（価格を指定して出す注文）、成行注文（価格を指定せず、即座に取引される注文）、キャンセルの 3 つを注文タイプと呼ぶ

2 先行研究

Maslov [1]は、現実の連続ダブルオークションを非常にシンプルに確率的にモデル化し、そのモデルは一般的に確率的板モデルと呼ばれている。確率的板モデルを構成する要素には、それぞれの注文に対する「売り／買いの選択」「注文タイプの選択」「指値／キャンセル価格の選択」「注文株数の選択」があり、Maslov はそれらを、次のようにモデル化した。

- ・ 売り／買いは等確率で選択
- ・ 指値／成行は等確率で選択。キャンセルはない
- ・ 指値価格は約定価格から範囲付き一様分布
- ・ 注文株数はすべて一定

このような非常にシンプルでありながらも、Maslov モデルはリターン（価格の変動）の分布の裾が正規分布より厚いべき分布になるファット・テールや、ボラティリティ（価格の変動の激しさ）の自己相関が長期にわたって正になるボラティリティ・クラスタリングといった、金融市場で広く見られる現象を再現することに成功し、それらが連続ダブルオークションという取引ルールが生み出す特徴だとした。しかし、価格変動のランダムウォーク性を表すハースト指数² (H) は、 $H \approx 0.25$ となり、現実の 0.5 に近い値を得ることはできず、価格変動の様子は実際のものとは大きく異なるものであった。なお、Maslov モデルのように注文戦略が過去の価格変動や板の状況にほとんど寄らないものを、ゼロインテリジェンス・モデルと言う。

Maslov 以降のモデルは、確率的板モデルの構成要素をより現実に即したものにしたり、あるいはそれを過去の価格変動や板の状況によって変化させる「インテリジェンス」を導入することで発展してきた。例えば、Daniels らの研究 [2]では、Maslov のモデルに対してキャンセルを導入し、また注文株数が一定という仮定を拡張し、正規分布の平均より右側を用いてモデル化している。その結果、市場の流動性を表すプライスインパクトを再現することに成功した。Slanina の研究 [3]で分析されている Genoa モデルでは、指値価格を一様分布によって決定するが、その幅がボラティリティに依存するようなインテリジェンスを導入した。その結果、Maslov モデルでは 0.25 と現実よりかなり小さいハースト指数だったのに対し、Genoa モデルでは長期スケールではハースト指数が $H \approx 0.25$ から現実に近い $H \approx 0.5$ へ遷移することを確認した。

3 目的

前章のように、確率的板モデルの研究はモデルをより現実に即した確率分布やインテリジェンスを導入することで、ファット・テール、ボラティリティ・クラスタリング、ハースト指数、流動性など、現実の市場で見られる統計性を再現できるモデルの構築を目指し発展してきた。しかし、価格変動の重要な特徴量であるハースト指数 H について、多くの確率的板モデルでは $H \approx 0.25$ か、ラグの長期スケールでは $H \approx 0.5$ であるものの短期スケールでは $H \approx 0.25$ のように推移するものが多く、実際の市場のように短期から長期まで $H \approx 0.5$ とランダムウォークに近い挙動を再現できるモデルは確認する限り提案されていない。後述のように、ハースト指数が 0.5 を大きく下回る価格変動は、実際の金融市場のそれとは大きく異なる。

そこで本研究では、確率的板モデルにインテリジェンスを導入し、より再現性の高いモデルを構築することを目的とする。具体的には、まず現実の株式の板情報から抽出したパラメータを用いた板モデルを構築する。その後、スプレッドと注文タイプの選択確率に注目したインテリジェンスを導入することで、ハースト指数への影響を調べ、現実の連続ダブルオークションを用いた株式市場の価格変動特性を生み出す要因を特定する。

4 モデル

本章では、第 1 節で本研究のベースとなる、現実の市場から抽出したパラメータを用いたモデルの説明を行う。そして第 2 節で、1 節のベースモデルにスプレッドと注文タイプの選択確率の関係に着目したインテリジェンスを導入したモデルの説明を行う。

4.1 ベースモデル

本節では本研究のベースとなる板モデルの説明を行う。なお、それぞれのパラメータは実際の板データから抽出し、銘柄ごとのパラメータを用いてそれぞれシミュレーションを行った。分析に用いた銘柄はそれぞれ東京証券取引所 1 部に上場する「エーザイ（銘柄コード：4523）」「オリエンタルランド（同 4661）」「SMC（同 6273）」「ファナック（6954）」の 4 銘柄である。抽出に用いた期間は 2014 年 1 月 14 日から 2014 年 6 月 30 日の 115 営業日内の前場・後場それぞれで、平均を計算した（特別気配が表れた場合は除外している）。板データは東京証券取引所の

² Maslov は価格の自己相関のフーリエ変換を $S(f)$ とすると、 $S(f) = f^{-(1+2H)}$ からハースト指数を求めた

提供する FLEX Full を用い、第 100 気配値までとそれ以上の価格の Over/以下の価格の Under を取得した。なお、この 4 銘柄・期間の設定理由は、

- ・ TOPIX100 に指定されており流動性が高い
- ・ 2014 年 1 月 14 日以降ティックサイズ³が縮小され市場が効率的になったと考えらる
- ・ 分析期間内の約定価格がティックサイズ変更価格の上下 100 ティック内で変動しており、価格帯の変化によるティックサイズ変更の影響を受けないことである。

4.1.1 モデルの概要

本研究の板モデルではそれぞれの注文に対して

- ・ 売り／買いの選択
- ・ 注文タイプの選択
- ・ 注文価格の選択（指値，キャンセルの場合）
- ・ 注文株数の選択

を行う。以下の項では、それぞれ順番に説明する。

4.1.2 売り／買いの選択

ある注文に対する売り／買いの選択は実データから計算した確率を用いずに等確率で行う。これは、実データから計算した確率だと、完全な等確率から多少ずれるため、それを用いてシミュレーションを行うと、毎回ずれた方向に対し価格が変動しやすくなってしまうためである。

4.1.3 注文タイプの選択

注文タイプ（指値注文／成行注文／キャンセル）の選択には表 1 に示す実データから計算した値を用いた。なお、板にたまっている注文の価格変更、あるいは成行注文への変更は「キャンセル+指値 or 成行」としている。また、即座に約定される価格への指値注文は、成行注文と区別できないものがほとんどであるため、成行注文としている。

表 1 注文タイプの選択確率

銘柄コード	4523	4661	6273	6954
成行注文	4.61%	4.48%	3.49%	4.59%
指値注文	52.43%	52.33%	51.63%	52.05%
キャンセル	42.97%	43.19%	44.88%	43.36%

4.1.4 注文価格の選択

指値注文あるいはキャンセルを行う場合はその価格を選択する。価格の選択は相対する売買の最良気

³ 注文を出すことのできる価格をティックと呼び、ティック間の大きさをティックサイズと呼ぶ。例えば、図 1 のティックサイズは 5 円。

配値を基準に行う。つまり、買い注文の場合は最良売気配値から i ティック安い価格で注文を出し、売り注文の場合は最良買気配値から i ティック高い価格で注文を出す。 i の分布は図 2 のように、銘柄ごとに実データから指値注文，キャンセルごとに抽出し、売りと買いで平均をとったものを使用する。また、本研究では価格はすべてティックサイズで正規化して考え、負の価格も許す。

なお、相対する最良気配値から 101 ティック以上離れた注文についてはまとめている。シミュレーションで 101 ティック目の価格が選択された場合は、[101,200]内の整数から等確率で価格を選択する。また、キャンセルの場合、選択された価格に複数の注文がある場合は、その中から等確率で一つ選択し、板から削除する。選択された価格に注文がない場合は、選択価格から板の内側へ最も近くに注文がある価格を選択する。

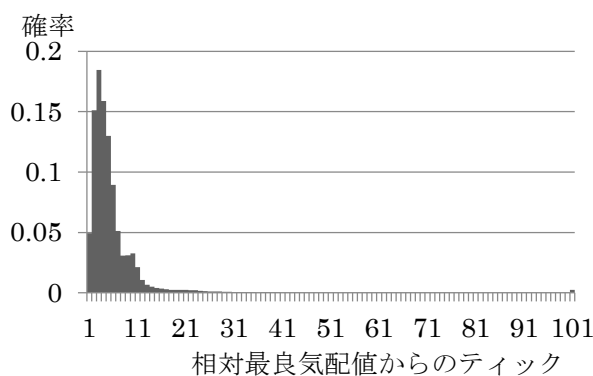
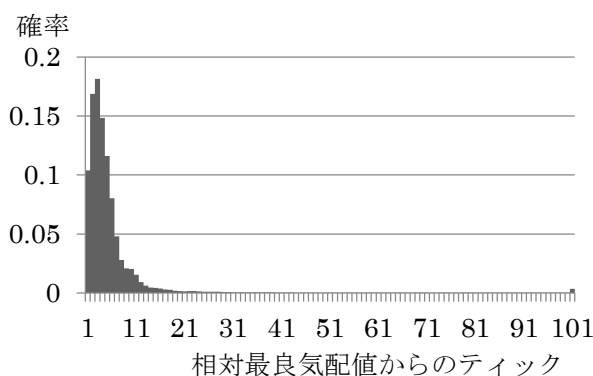


図 2 注文価格の分布 (4523)

上：指値注文 下：キャンセル
(101 ティック以降はそれ以上を合計)

4.1.5 注文株数の選択

成行注文・指値注文が選択された場合は注文株数を決定する。注文株数は図 3 のように成行注文，指値注文ごとに実データから抽出した分布を使用する。

なお注文可能な株数は銘柄ごとに決められており（単元株数という）、本研究では株数は単元株数で正

規化している。また、101 単位以上の注文単位はまとめているが、シミュレーションで 101 単位の注文株数が選択された場合は[101,200]内の整数から等確率で注文株数単位を選択する。

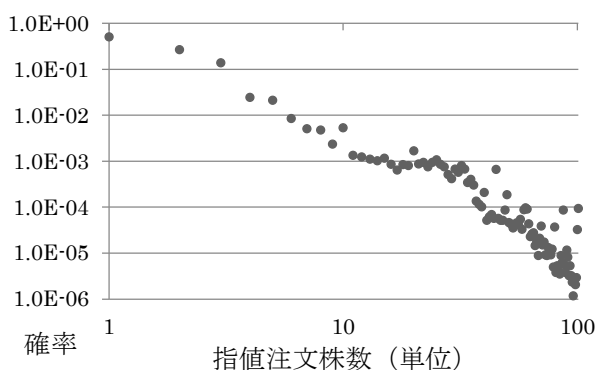
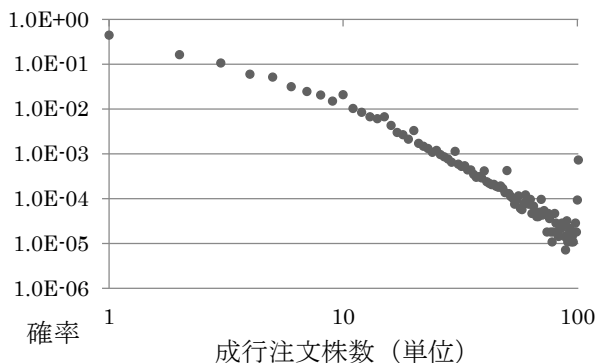


図 3 注文株数の分布 (4523)
上：成行注文 下：指値注文
(101 単位以上はそれ以上を合計)

4.1.6 シミュレーション開始前の設定

東京証券取引所の場合、実際に売買が行われる時間は前場が 9:00 ~ 11:30, 後場が 12:30 ~ 15:00 となっている。しかし、それぞれの売買時間の開始前に一定時間注文をまとめ、板寄せという方式でそれら进行处理した後に売買を開始させるため、板に板寄せで処理されなかった注文が残った状態で売買が開始される。本研究ではその状況を再現するため、一定量指値注文をためてからシミュレーションを開始する。ための注文数は、表 2 に示した各銘柄における売買時間開始時の注文数の平均を採用する。また、その際の注文価格の分布は 4.1.4 項で示したのではなく、図 4 のような各銘柄における板の相対する最良気配値からの各距離における平均残存注文数を売り買いで平均させたものを用いる。ここでも 101 ティックが選択された場合は[101,200]内の整数から等確率で相対する最良気配値からのティック位置を決定する。注文株数は 4.1.5 で説明したように決定する。

表 2 売買開始時の平均残存注文数

銘柄コード	4523	4661	6273	6954
株数	1721.9	1057.3	154.5	1097.4

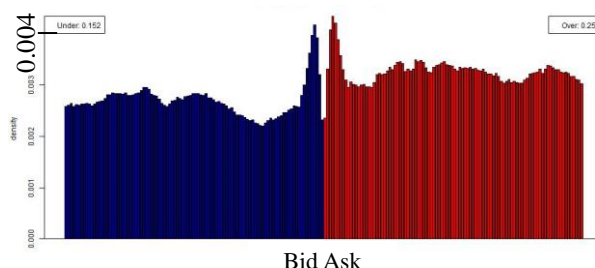


図 4 平均残存注文数の分布 (4523)
(左が買い, 右が売り注文. 101 ティック以降は表示していない)

4.2 スプレッドに着目した提案モデル

4.1 章で説明した、板モデルの各要素に対し実データから計算した単純な分布を用いたモデルに対し、本研究ではさらにスプレッドと注文タイプの選択確率の関係に着目した効果を追加したモデルを提案する。

スプレッドと注文タイプの選択について考えると、投資家はスプレッドが通常よりも開いた状態の板に対して成行注文よりも指値注文を出したがると思われる。なぜなら、スプレッドが開いた状態で成行注文を出した場合、閉じた状態に比べて不利な価格で約定されてしまうからである。

そこで、図 5 のようにスプレッドとそこで注文タイプの割合について調べたところ、確かにスプレッドが広がるにつれ指値注文の確率が高まり、成行注文の確率は下がることが分かった。また、スプレッドの出現回数が 10000 を超える領域で成行注文と指値注文に対しべき関数による回帰分析を行ったところ、表 3 のように高い説明力を得ることができた。

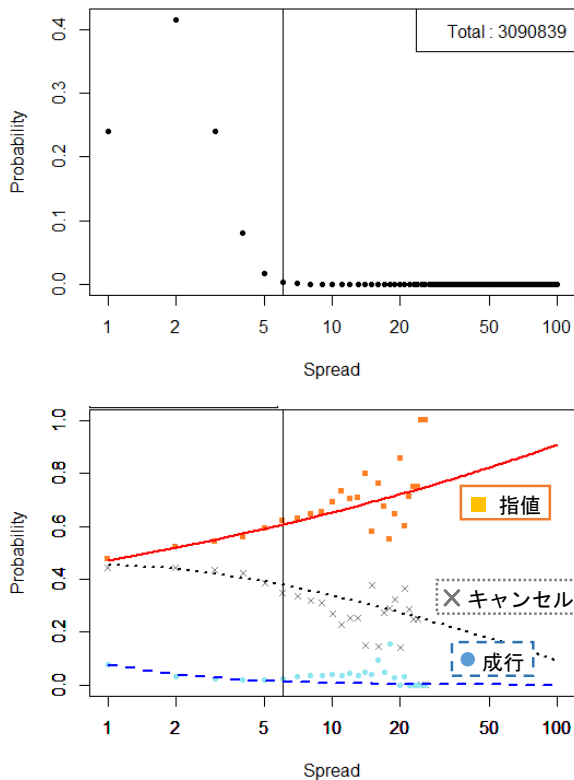


図 5 スプレッドの出現割合 (上)

スプレッドと注文タイプの関係 (下) (4661)

縦実線より左側が出現回数が 10000 以上の領域。上図のように 10000 回より頻度が少ない部分はほとんど表れないため無視でき、下図では縦実線より左側の領域のみで回帰分析を行っている。下図における回帰曲線は上の実線（指値注文）と下の破線（成行注文）は下表の回帰係数から求めた確率で、中央の点線は 1 からその 2 つの確率を引いている。

表 3 スプレッドー注文タイプ確率の回帰分析

回帰式はそれぞれの確率において $p = a * Spread^b$

カッコ内は t 値。 *** $p < 0.001$ ** $p < 0.01$

	4523	4661	6273	6954
指値注文確率				
a	0.48 (201***)	0.47 (47.6***)	0.44 (105***)	0.48 (107***)
b	0.13 (35.6***)	0.14 (8.94***)	0.095 (22.5***)	0.13 (18.7***)
成行注文確率				
a	0.057 (5.16**)	0.076 (9.98***)	0.14 (77.7***)	0.057 (4.81**)
b	-0.33 (-1.80)	-0.93 (-6.11**)	-0.92 (-66.3***)	-0.39 (-1.89)

そこで、ベースモデルの注文タイプの選択確率に関して、表 3 で示した回帰モデルを導入したものを提案モデルとし、次章で実データ、導入前のベースモデル、スプレッドに着目した提案モデルの 3 つの統計量を比較する。

5 結果と考察

実データと、それぞれ対応するパラメータを用いた以上の 2 つのモデルでシミュレーションを行った結果を比較する。実データにおける結果は各場の統計量の平均を求め、シミュレーションでは 100,000 ステップを 10 回行い平均を求めている。

リターンは中値⁴ (P) の差分、ボラティリティはリターンの絶対値の平均で定義した。また、ハースト指数 H は [4] に倣い(1)式で計算した。

$$\left((P(t + \Delta\tau) - P(t))^2 \right)^{1/2} \propto \Delta\tau^H \quad (1)$$

ただし $\Delta\tau$ はラグで、本研究では一般的に計算されているように 2 の累乗を用いた。

ハースト指数は時系列がランダムウォークの時 $H=1/2$ 、反持続的な相関を持つ時 $0 \leq H < 1/2$ 、持続的な相関を持つとき $1/2 < H \leq 1$ となる。ハースト指数は 1/2 を基準として市場の効率性を表す指標と考えることができる [5]。

図 6 に銘柄 4523 のパラメータを用いたベースモデル、提案モデルによるシミュレーションの価格変動の例を示す。ベースモデルでは

- ・シミュレーションの前後半で価格の変動が激しい区間と、安定してほとんど変動がない区間にはっきり分かれてしまう
 - ・価格が垂直的に振動してしまう
- という問題点がよく見られた。提案モデルでは 2 つ目の問題点は完全ではないものの、シミュレーションの前後半で価格変動の様子が明らかに変わってしまう問題点は改善できた。

⁴ 最も高い買い注文価格と最も安い売り注文価格の平均

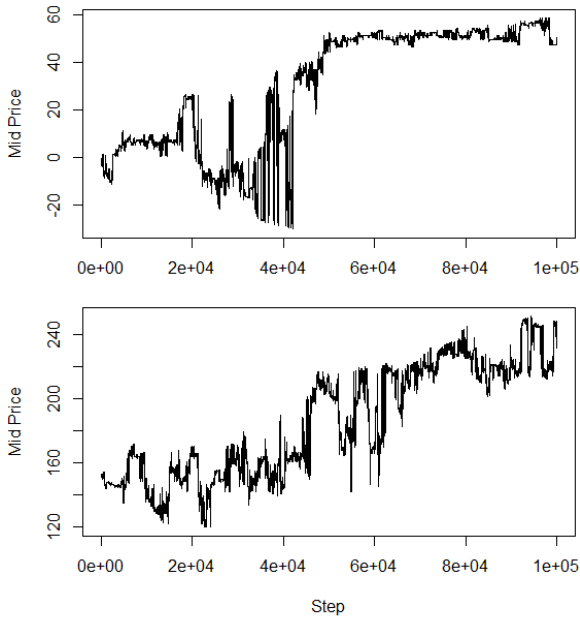


図 6 シミュレーションによる価格変動例
上：ベースモデル 下：提案モデル
銘柄 4523 のパラメータを使用

次にスタイライズド・ファクトについて検証する。スタイライズド・ファクトとは、金融市場における価格変動について、市場や銘柄によらず普遍的に現れるとされている現象である。

図 7 リターンの分布図 7は1ステップと100ステップごとのリターンの分布である。実データ、ベースモデル、提案モデルのいずれも裾野が正規分布より厚くなる、ファット・テールと呼ばれる現象や、ステップ数を大きくすると正規分布に近づく様子を再現している。また、その広がり方も両方のモデルにおいて実データをよく再現している。

図 8はボラティリティの自己相関関数である。ボラティリティは価格変動の激しさを表す指標であり、本研究ではリターンの絶対値の平均値と定義した。実データ、ベースモデル、提案モデルのいずれもボラティリティの自己相関関数は長期に渡って正の値をとる、ボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる現象を再現している。ただし、モデルでは自己相関関数の値は実データよりも大きくなってしまった。これは図 6の価格変動で見たように、価格の垂直的な振動によって引き起こされてしまったものと考えられる。

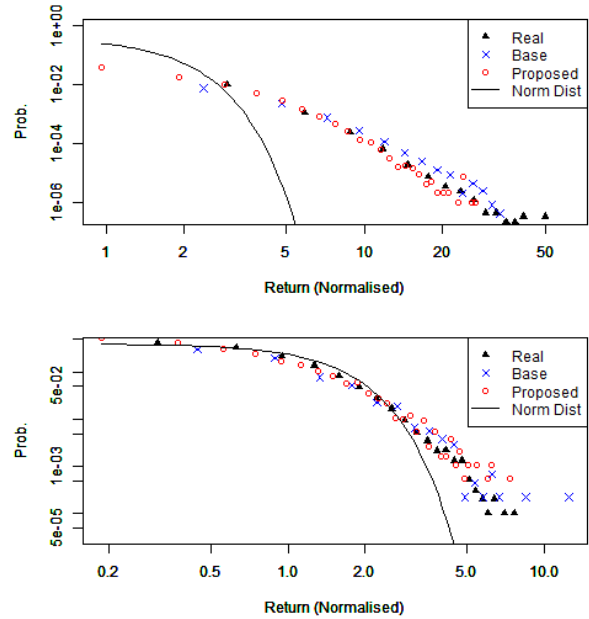


図 7 リターンの分布
上：1ステップ，下：100ステップごとのリターン
▲実データ，×ベースモデル，○提案モデル
リターンは標準化済み。実線は標準正規分布。
銘柄 4661 のパラメータを使用。

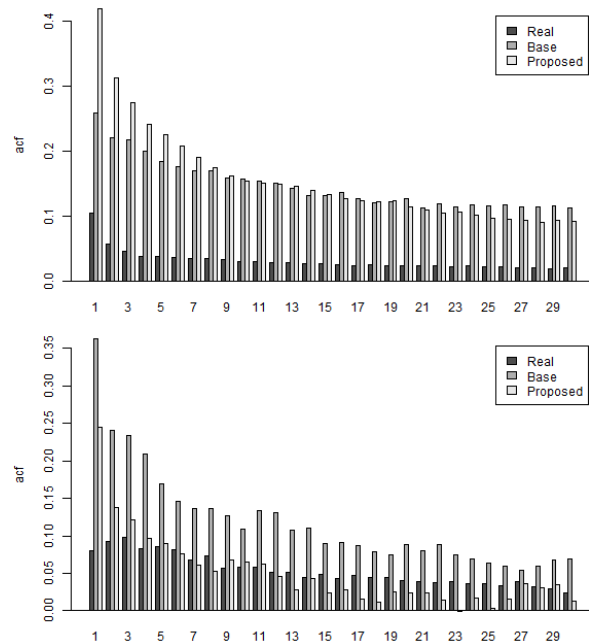


図 8 ボラティリティの自己相関関数
上：1ステップ，下：100ステップごとのリターンから計算したボラティリティ。各ラグにおいて左から実データ，ベースモデル，提案モデル。銘柄 4523 のパラメータを使用。

最後に、ハースト指数について検証する。図 9、表 4 に示したように、全銘柄においてベースモデルに対しスプレッドに着目したインテリジェンスを導入した提案モデルでハースト指数は上昇した。これはベースモデルにおいて価格が垂直的に振動していたが、提案モデルではそれが低減されたことによる影響や、ベースモデルのようにシミュレーションの後半で価格変動がほとんどなくなってしまう現象を解消できたためだと考えられる。

依然として実データよりは低い値をとるものの、ハースト指数の上昇は価格変動の様子が現実のものに近づいたことを示し、スプレッドが投資家の注文タイプの選択へ与える影響が現実のような価格変動を生み出す要因の一つであるということが出来る。

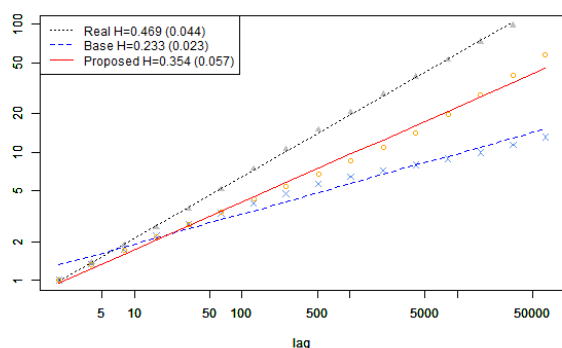


図 9 ハーストプロット

▲実データ、×ベースモデル、○提案モデル
3つのデータを比較できるように、縦軸は正規化している。銘柄 6954 のパラメータを使用。

表 4 ハースト指数
カッコ内は標準偏差

	4523	4661	6273	6954
実データ	0.456 (0.048)	0.477 (0.055)	0.472 (0.051)	0.469 (0.044)
ベース モデル	0.289 (0.047)	0.245 (0.019)	0.228 (0.032)	0.233 (0.023)
提案 モデル	0.319 (0.016)	0.282 (0.024)	0.317 (0.055)	0.354 (0.057)

6 結論

本研究ではまず、確率的板モデルを構成する各要素に対して、現実の市場で見られる分布を当てはめることのできるベースモデルを構築した。ベースモデルは注文は板の状態にほとんどよらずに注文が出されるゼロ・インテリジェンス・モデルであった。

しかし、現実の市場における注文の出され方を分

析すると、図 5 で示したようにスプレッドが注文タイプの選択に対して強い影響を与えることがわかった。つまり、スプレッドが開くほど成行注文では不利な価格で約定されてしまうため、指値注文の割合が増えることを高頻度の板データから実証することができた。

そこで、提案モデルとして、以上のようにスプレッドに注目して注文タイプの選択確率を決定するようなインテリジェンスを導入したモデルを構築した。

ベースモデルでは価格の変動が見た目にも現実と異なるようなものであったが、提案モデルではベースモデルの問題点のある程度解決することができ、ハースト指数も現実の市場で見られる値に近づけることができた。

しかし、提案モデルでもハースト指数は依然として現実よりも小さい値しか再現できておらず、現実の市場の価格変動を再現するためのさらなるインテリジェンスを発見する必要がある。例えば、成行注文の株数を決定する際に、板の厚さに着目し、価格変動により不利な価格での約定を避けるような投資家の心理などを今後は分析したいと考えている。

最後に、本研究のように市場の基本的な価格変動を生み出す要因を探る研究は、有効な投資戦略を考える際や、より安定性の高い市場を生み出す制度を考える上で重要である。

参考文献

- [1] S. Maslov, "Simple Model of a Limit Order-Driven Market," *Physica A*, Vol 278, pp. 571-578, (2000).
- [2] M. G. Daniels, J. D. Farmer, L. Gillemot, G. Iori, E. Smith, "Quantitative Model of Price Diffusion and Market Friction Based on Trading as a Mechanistic Random Process," *Physical Review Letters* 90: 10, (2003).
- [3] F. Slanina, "Critical Comparison of Several Order-Book Models for Stock-Market," *Eur. Phys. J. B* 61, pp.225-240, (2008).
- [4] T. Preis, S. Golke, W. Paul, J. J. Schneider, "Statistical Analysis of Financial Returns for a Multiagent Order Book Model of Asset Trading," *Physical Review E* 76, 016108, (2007).
- [5] C. Eom, S. Choi, G. Oh, W.-S. Jung, "Hurst Exponent and Prediction Based on Weak-form Efficient Market Hypothesis of Stock Market," *Physica A* 387, pp.4630-4636, (2008).