

# $t$ 過程ボラティリティ変動モデル Student's $t$ -Process Volatility Model

濃野 歩<sup>1,2\*</sup> 内山 祐介<sup>2</sup> 中川 慧<sup>3</sup>  
Ayumu Nono<sup>1,2</sup> Yusuke Uchiyama<sup>2</sup> Kei Nakagawa<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院 工学系研究科

<sup>1</sup> The University of Tokyo, Graduate School of Engineering <sup>2</sup> 株式会社 MAZIN

<sup>2</sup> MAZIN Inc.

<sup>3</sup> 野村アセットマネジメント株式会社

<sup>3</sup> Nomura Asset Management Co, Ltd.

**Abstract:** アセットアロケーションやデリバティブの計算において、金融資産の変動規模を表すボラティリティが活用されている。一方で、ボラティリティは直接観測される量ではないため、観測量に対する潜在変数を用いたモデル化が行われている。これらのモデルは総じてボラティリティ変動モデルとよばれており、主に計量ファイナンスや金融工学の分野において使用されてきた。従来のボラティリティ変動モデルのほとんどは線形モデルであるため、非線形性を有する複雑なボラティリティ変動を推定することができない。潜在変数の非線形ダイナミクスを推定する機械学習モデルとして、ガウス過程動的潜在変数モデルが提案されている。本研究では、ボラティリティの非線形ダイナミクスを外れ値に対してロバストの推定することを目的に、スチューデントの $t$ 過程を動的潜在変数モデルに拡張したモデルを提案する。提案モデルの潜在変数とハイパーパラメータを粒子フィルタに基づいてオンライン推定する。これにより、観測された金融資産に対応するボラティリティ変動を推定する。

## 1 はじめに

アセットアロケーションやデリバティブの価格計算は金融工学や計量ファイナンスの主要な問題として学術界と実業界の双方において研究が行われてきた。これらの問題においては、金融資産の価格変動を直接対象とするのではなく価格変動のリターンの変動に基づいた方法論が構築されている。理想化された状況ではリターンの変動は正規分布に従うことが前提とされているが、実際に観測される金融資産価格のリターンの変動は正規分布よりも裾の厚い確率分布に従うことが知られている [1]。この観測事実を説明するために、ボラティリティという変動の大きさを表す量が利用されている。これにより、金融市場のボラティリティ変動を正確に捉えることが現代の金融工学や計量ファイナンスの主要な問題のうちの1つとして認識されるようになっていく。

一般に、ボラティリティはリターンが従う条件付き正規分布の分散として定義されている。金融工学や計量ファイナンスの分野では、ボラティリティを観測されない潜在変数として与え、ボラティリティの時間発展に

する種々の時系列モデルが提案されている。このような時系列モデルは総じてボラティリティ変動モデルと呼ばれている [2]。ボラティリティ変動モデルは観測変数であるリターンと潜在変数であるボラティリティとから成る動的ベイズモデルであるため、ベイズの定理に基づいて、予測・状態推定・平滑化の操作を実施することが可能である。

近年は、ボラティリティ変動モデルのような統計的時系列モデルのみならず、機械学習の手法を使用したボラティリティ推定法も提案されている [3]。ボラティリティ変動は直接観測することができない潜在変数であるため、潜在変数を取り入れた機械学習モデルが必要となる。このようなベイズ学習モデルとしてはガウス過程回帰モデルが存在し [4]、金融の諸問題に対してもいくつかの応用例が報告されている [5, 6]。また、金融資産価格のリターン変動のような非正規分布に従うデータに対してガウス過程回帰モデルを拡張したスチューデントの $t$ 過程回帰モデルが提案されており [7]、金融時系列データの解析 [8] やアセットアロケーションの問題 [9] に対して適用されている。

本研究では、先行研究 [9] において提案されたスチューデントの $t$ 過程潜在変数モデルに時系列構造を取り入れることを目的に動的潜在変数モデルへの拡張を行う。

\*連絡先：東京大学大学院 工学系研究科  
〒277-1131 千葉県柏市柏の葉 5-1-5  
E-mail: nono-ayumu303@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

$t$ -過程潜在変数モデルにおいてはハイパーパラメータ同様に潜在変数も観測データから推定される必要があるため、学習に要する時間が増大してしまうことが懸念されていた。この問題に対して、本研究では動的潜在変数に加えてハイパーパラメータも潜在変数とみなすことで粒子フィルタによるオンライン学習法を提案する。提案手法の応用例として、提案手法による為替データのボラティリティ推定結果についても紹介する。

## 2 先行研究

### 2.1 ボラティリティ変動モデル

ボラティリティ変動モデルの中でも最も基本的でかつ使用されているものは以下に示す GARCH モデルである。

$$x_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j x_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2)$$

ここで、 $x_t$  は平均が 0 で分散  $\sigma_t^2$  の正規分布からサンプルされる確率変数であり、分散の時間発展は式 (2) によって与えられる。パラメータ  $\alpha_j, \beta_i$  はそれぞれ正の値をとり、観測データが得られれば最尤推定によって求められる。 $p$  と  $q$  はそれぞれ回帰の次数であり、式 (1) と (2) の組を GARCH( $p, q$ ) モデルと呼ぶ。この時系列モデルを基本として、非対称な効果を導入したり、多変量へと拡張することが目的に応じて行われている [10]。

### 2.2 ガウス過程回帰モデル

任意の有限個の  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  と確率過程  $f(\cdot)$  に対して、 $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$  の同時確率密度関数が正規分布で与えられるとき、 $f(\cdot)$  をガウス過程という。ガウス過程が従う確率密度関数は無限次元ベクトルが従う正規分布であるため、平均値関数  $m(\cdot)$  と共分散関数  $K(\cdot, \cdot)$  を

$$m(x) = \mathbb{E}[f(x)], \quad (3)$$

$$K(x, x') = \mathbb{E}[(f(x) - m(x))(f(x') - m(x')))] \quad (4)$$

で定義すると、 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  が与えられたときの確率密度関数は  $p(f|X) = \mathcal{N}(m(X), K(X, X))$  となる。確率過程  $f$  がガウス過程として抽出されることを明示する際には、 $f \sim \mathcal{GP}(m(\cdot), K(\cdot, \cdot))$  と表記する。簡単のため、ガウス過程の平均関数は 0 とされることが多い。共分散関数はカーネル関数  $k(\cdot, \cdot)$  により、

$$K(x, x') = k(x, x') \quad (5)$$

で与えられる。カーネル関数は非負の対称関数であるため、 $K(X, X)$  は正定値対称行列となる。カーネル関数としては動的基底関数 (Radial Basis Function; RDF)

$$k_{\text{RBF}}(x, x') = \alpha \exp(-l^{-2} \|x - x'\|^2) \quad (6)$$

が最もよく用いられている。動的基底関数はハイパーパラメータとして  $\alpha$  と  $l$  を持つ。これらは最尤推定等の最適化法によって決定される。

観測データの組  $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$  に対して  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  とする。この  $(X, Y)$  を学習させたガウス過程から、未知のデータ  $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*]^T$  に対する予測値  $Y^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*]^T$  は、平均関数  $f^*$  と共分散関数  $K^*$  がそれぞれ

$$f^* = m_X + K_{X^*, X} K_{X, X}^{-1} Y, \quad (7)$$

$$K^* = K_{X^*, X^*} - K_{X^*, X} K_{X, X}^{-1} K_{X, X^*} \quad (8)$$

で与えられる正規分布  $\mathcal{N}(f^*, K^*)$  から抽出される。

### 2.3 $t$ -過程回帰モデル

ガウス過程では、確率過程  $f(\cdot)$  が従う確率密度関数として正規分布を仮定していた。そのため、金融時系列のように正規分布よりも裾の厚い確率分布に従うデータに適用する際には、正確な推定を行うことができなくなる。このようなデータに対してガウス過程を拡張したモデルが  $t$ -過程である [11]。  $t$ -過程は、確率過程  $f(\cdot)$  が自由度  $\nu$  のスチューデントの  $t$ -分布

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(m, K, \nu) &= \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{[(\nu-2)\pi]^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2}) |K|^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{\nu-2} (y-m)^T K^{-1} (y-m) \right]^{-\frac{\nu+n}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

に従うモデルである。ここで、 $m(\cdot)$  と  $K(\cdot, \cdot)$  はそれぞれ平均関数と共分散関数であり、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。確率過程  $f(\cdot)$  が  $t$ -過程であるとき、 $f \sim \mathcal{TP}(m(\cdot), K(\cdot, \cdot); \nu)$  と表記する。ガウス過程同様に、 $t$ -過程の平均関数も一般性を損なうことなく 0 として扱われることが多い。

$t$ -過程の予測分布もまた  $t$ -分布となる。そのときの自由度、平均関数および共分散関数は以下のように更新される [8]。

$$\nu^* = \nu + n, \quad (10)$$

$$m^* = m + K_{X^*, X} K_{X, X}^{-1} Y \quad (11)$$

$$K^* = \frac{\nu - \beta - 2}{\nu - n - 2} \left[ K_{X^*, X^*} - K_{X^*, X} K_{X, X}^{-1} K_{X, X^*} \right] \quad (12)$$

ガウス過程とは異なり、 $t$ -過程ではデータ数の影響が自由度と共分散関数の更新式に反映されていることが確認できる。

## 2.4 $t$ -過程潜在変数モデル

$t$ -過程潜在変数モデルでは入力  $X$  が潜在変数として与えられる。観測データ  $y \in \mathbb{R}^D$  と潜在変数  $x \in \mathbb{R}^Q$  とが  $t$ -過程  $f \sim \mathcal{TP}(m(\cdot), K(\cdot, \cdot); \nu)$  によって  $y = f(x)$  と関係づけられることを仮定し、 $N$  個の観測データを並べたものを  $Y \in \mathbb{R}^{D \times N}$ 、 $N$  個の潜在変数を並べたものを  $X \in \mathbb{R}^{Q \times N}$  としたときに

$$p(Y|X) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+D}{2}\right)}{[(\nu-2)\pi]^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |K_{X,X}|^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

$$\times \left[ 1 + \frac{1}{\nu-2} (Y - m_X)^T K_{X,X}^{-1} (Y - m_X) \right]^{-\frac{\nu+D}{2}}$$

で与えられるモデルを、 $t$ -過程潜在変数モデルと定義する。スチューデントの  $t$  分布は  $\nu \rightarrow \infty$  の極限で正規分布に収束するため、 $t$ -過程潜在変数モデルはガウス過程潜在変数モデルを内包することがわかる。また、ガウス過程潜在変数モデル同様に、 $t$ -過程潜在変数モデルにおいても一般性を損なうことなく平均関数を  $m(\cdot) = 0$  とすることができる。

潜在変数とハイパーパラメータは観測データに対する最尤推定によって求められる。式 (13) に対応する対数尤度関数は

$$\log p(Y|X) = \log \Gamma\left(\frac{\nu+D}{2}\right) - \frac{D}{2} \log[(\nu-2)\pi] - \log \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \log |K_{X,X}| - \frac{\nu+D}{2} \log \left( 1 + \frac{1}{\nu-2} \Delta \right), \quad (14)$$

$$\Delta = (Y - m_X)^T K_{X,X}^{-1} (Y - m_X) \quad (15)$$

で与えられる [9]。この対数尤度に対して (確率的) 勾配法、変分推論、マルコフ連鎖モンテカルロ法等を用いることで潜在変数とハイパーパラメータを推定することができる。

## 3 提案モデル

### 3.1 $t$ -過程ボラティリティ変動モデル

ボラティリティ変動は直接観測することできないため、GARCH モデルに代表されるような動的潜在変数としてモデル化されている。GARCH モデルやその派生形の多くはボラティリティ変動を線形の時系列モデルで推定している [10]。ここでは、 $t$ -過程潜在変数モデルを動的潜在変数に拡張することで、ボラティリティ変動の非線形ダイナミクスを推定する。また、 $t$ -過程をベースとしたモデリングにより、ガウス過程をベースとした

モデルよりも、ロバストな推定が行えることが期待される。

時刻  $t$  における金融資産価格を  $p_t$  としたとき、対数収益率は  $x_t = \log(p_t/p_{t-1})$  で与えられる。このとき、 $x_t$  に対応するボラティリティを  $\sigma_t$  とする。ここで、観測量  $x_t$  と潜在変数  $\sigma_t$  に対して、 $t$ -過程ボラティリティ変動モデルを以下のように定義する。

$$x_t \sim \mathcal{T}(0, \sigma_t^2; \nu), \quad (16)$$

$$v_t := \log \sigma_t^2, \quad (17)$$

$$v_t = f(v_{t-1}, x_{t-1}; \nu) + \epsilon_t \quad (18)$$

$$\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \quad (19)$$

観測量  $x_t$  は 0 を中心とし、パラメータが  $\sigma_t^2$  で与えられる自由度  $\nu$  の  $t$  分布に従うものとし、動的潜在変数  $v_t$  は実数全体を値域としてとるように式 (17) によって定義する。動的潜在変数  $v_t$  の時間発展は式 (18) によって与えられる。式 (18) の右辺における確率過程  $f$  は  $t$ -過程として抽出され、以下のように与えられる。

$$f \sim \mathcal{TP}(m, k; \nu), \quad (20)$$

$$m(\xi_{t-1}) = av_{t-1} + bx_{t-1}, \quad (21)$$

$$k(\xi_{t-1}, \xi'_{t-1}) = \gamma \exp(-l^{-2} \|\xi_{t-1} - \xi'_{t-1}\|^2) \quad (22)$$

ただし、 $\xi_t = (x_t, v_t)$  である。また、ハイパーパラメータは  $\theta = (\nu, \sigma_n, a, b, \gamma, l)$  である。観測データの系列  $\{x_{1:T}\}$  が与えられたときに、動的潜在変数の系列  $\{v_{1:T}\}$  とハイパーパラメータ  $\theta$  を推定することで、ボラティリティ変動を求めることが可能となる。本研究では粒子フィルタを用いたオンライン推定手法を提案する。

### 3.2 粒子フィルタ

粒子フィルタは事前分布をランダムサンプリングによるモンテカルロ近似によって推定する方法であり、確率分布を多数の粒子によって表現する。そのため、非線形システムに対しても適用でき、システムノイズや観測ノイズを多峰性分布で表現することも可能である [12]。

粒子フィルタの基本的なアイデアは、事前分布と事後分布をこれらの条件付き分布に従う多数の粒子 (サンプル) を用いて近似するという点である。ここで、粒子数  $N$  のサンプル集合を用いて分布を近似することを考える。 $\{v_{1:t-1}^i\}_{i=1}^N$  と  $W_{t-1}^i$  をそれぞれ、時刻  $t-1$  までの潜在変数とそれに付随する重みとする。重みは正規化されており、 $\sum_{i=1}^N W_{t-1}^i = 1$  である。これらを用いると時刻  $t-1$  での事後分布  $p(v_{1:t-1}|x_{1:t-1})$  は次のように近似される [13]。

$$\hat{p}(v_{1:t-1}|x_{1:t-1}) = \sum_{i=1}^N W_{t-1}^i \delta(v_{1:t-1}) \quad (23)$$

ただし、 $\delta(\cdot)$  はディラックのデルタ関数である。時刻  $t$  での状態推定を行うに、粒子のリサンプリングを行う。リサンプリングは重み  $W_{t-1}^i$  に従って行われるため、重みが小さい粒子を選択的に次のステップに残し、重みの小さい粒子を消滅させる。こうして再び得られたサンプル集合  $\{v_{1:t-1}^j\}$  によって時刻  $t$  での予測分布  $p(v_t|v_{1:t-1}, x_{1:t-1})$  が表現できる。各粒子の重みは観測量が与えられた時の各粒子の尤度に基づいて定められるため

$$\tilde{W}_t^i \propto p(x_t|v_t^i) \quad (24)$$

という関係のみたす。規格化条件を考慮することで、時刻  $t$  における重みが

$$W_t^i = \frac{\tilde{W}_t^i}{\sum_{i=1}^N \tilde{W}_t^i} \quad (25)$$

によって求められる。以上が粒子フィルタの実施手順である。

### 3.3 オンライン推定アルゴリズム

粒子フィルタの実装において、ハイパーパラメータを定数として更新すると粒子の縮退が生じてしまい推定が上手く行かないことが指摘されている。そこで、本研究ではハイパーパラメータを動的潜在変数  $\theta_t$  として取り扱うことでオンライン推定を実施する。

動的潜在変数  $v_t$  およびハイパーパラメータ  $\theta_t$  のオンライン推定アルゴリズムを以下の手順で実施する。

1. 入力: オンライン推定に際し、予め次の2つの情報を与えておくものとする。

粒子数  $N$

初期分布  $p_0(v), p_0(\theta)$

2. 初期化:  $N$  個 2 組の粒子群を抽出し、一方を動的潜在変数を表す粒子群とし、もう一方をハイパーパラメータを表す粒子群とする。それぞれの重みは一律に与える。

$$\{v_0^i\}_{i=1,\dots,N} \sim p(v)$$

$$\{\theta_0^i\}_{i=1,\dots,N} \sim p(\theta)$$

$$W_{v,0}^i = 1/N$$

$$W_{\theta,0}^i = 1/N$$

3. 各パラメータ粒子の重みを算出: まず、 $N$  個の動的潜在変数の粒子  $\{v_{t-1}^i\}$  から時刻  $t-1$  における重み付き平均値を求める。

$$\bar{v}_{t-1}^i = \sum_{i=1}^N W_{v,t-1}^i v_{t-1}^i \quad (26)$$

次に、ハイパーパラメータ  $\theta_t$  と動的潜在変数  $v_t$ 、および観測値  $x_t$  で定められる確率過程  $f(v_t, x_t, \theta_t)$

をもとに、動的潜在変数の粒子を生成する。

$$v_t^i = f(\bar{v}_{t-1}^i, x_{t-1}, \theta_{t-1}^i) \quad (27)$$

生成した  $N$  個の推定値  $\{v_t^i\}$  に対して尤度を求め、それを規格化して粒子の重みを算出する。

$$W_{\theta,t}^i \propto p(x_{t-1}|v_t^i, \theta_{t-1}^i) \quad (28)$$

得られた重みに基づいて、 $N$  個のハイパーパラメータの粒子  $\{\theta_t^j\}_{j=1}^N$  を生成する。

4. 時刻  $t$  における潜在変数の生成:  $N$  個のハイパーパラメータの粒子  $\{\theta_{t-1}^i\}$  から時刻  $t-1$  におけるハイパーパラメータの重み付き平均値を求める。

$$\bar{\theta}_{t-1} = \sum_{i=1}^N W_{\theta,t-1}^i \theta_{t-1}^i \quad (29)$$

次に、確率過程  $f(v_{t-1}^i, x_{t-1}, \bar{\theta}_{t-1})$  から動的潜在変数の粒子を生成する。

$$v_t^i = f(v_{t-1}^i, x_{t-1}, \bar{\theta}_{t-1}) \quad (30)$$

5. 動的潜在変数の推定: 時刻  $t$  における観測値  $x_t$  が得られたときに、 $N$  個の動的潜在変数の数粒子についての尤度を求める。この尤度を規格化することで、以下のように粒子の重みを算出する。

$$W_{v,t}^i \propto p(x_t|v_t^i, \bar{\theta}_{t-1}) \quad (31)$$

この重みから算出される重み付き平均値

$$\hat{v}_t = \sum_{i=1}^N W_{v,t}^i v_t^i \quad (32)$$

が動的潜在変数の推定値である。

6. フィルタ: 重みに基づいて、 $N$  個の動的潜在変数  $\{v_t^j\}_{j=1}^N$  を抽出する。

繰り返し  $t := t+1$  として 3 に戻る。

## 4 実証分析

ここでは、代表的な為替指数を用いて  $t$ -過程ボラティリティ変動モデルによるボラティリティ変動の推定を行う。データセットとして、2010年の米ドル/日本円為替レートの2ヶ月分、469サンプル(3時間足)を使用した。対数収益率  $x_t$  の統計量は以下の通りである。高い尖度と負の歪度という金融時系列特有の性質が確認され、正規性を満たさないことがわかる。

推定期間: 2ヶ月(469サンプル)

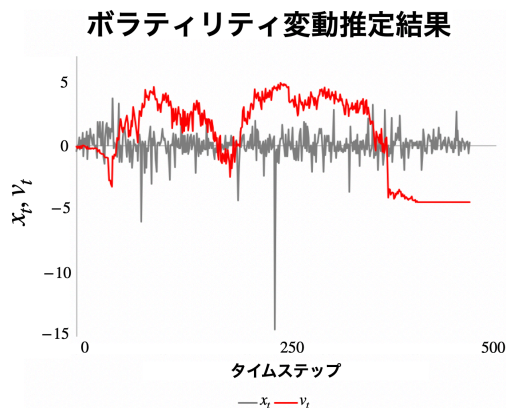


図 1: ボラティリティ変動の推定結果 (自由度  $\nu = 8$ )

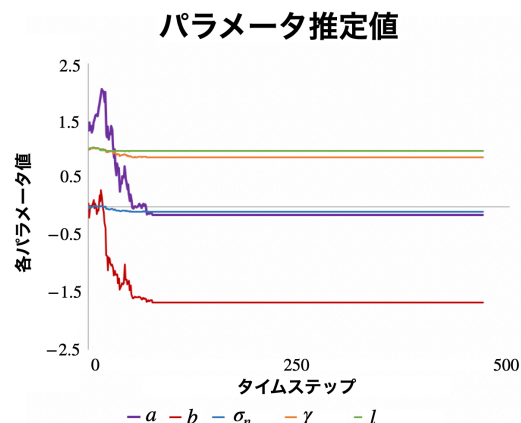


図 2: ハイパーパラメータの推定結果 (自由度  $\nu = 8$ )

平均:  $1.59 \times 10^{-2}$

分散: 1.32

歪度: -4.52

尖度:  $5.44 \times 10$

観測量である対数収益率  $x_t$  に対応するボラティリティ変動を推定した結果を図 1 に示し、それと同時にオンライン推定したハイパーパラメータの推定結果を図 2 に示す。図より、実施したオンライン推定においてハイパーパラメータが収束している様子を確認することができる。また、自由度を  $\nu = 1 \sim 30$  の間で変化させたときの対数尤度を図 3 に示す。それぞれの自由度に対して 10 回の数値実験を行い、それらの平均値をプロットした。自由度と尤度との間には相関係数  $-0.85$  の負の相関があり、自由度が小さいときに尤度は大きくなる傾向にあるといえる。スチューデントの  $t$  分布は  $\nu \rightarrow \infty$  の極限で正規分布に収束することが知られており、実用上は  $\nu \geq 30$  ではほぼ正規分布と同等であると見なせることから、自由度と尤度との間に負の相関が存することは、 $t$  過程ボラティリティ変動モデルはガウス過程ボラティリティ変動モデルよりも優位なモデルであることを意味する。また、同様の数値実験を観測量の変動がより大きい 12 時間足で行うと、負の相関がより顕著に現れたため、 $t$  過程ボラティリティ変動モデルはガウス過程ボラティリティ変動モデルよりも外れ値に対するロバストな推定が可能であることが確認できる。

## 5 まとめ

本研究では、 $t$ -過程動的潜在変数モデルを金融資産変動のボラティリティ推定に応用した、 $t$ -過程ボラティリ

## 自由度と尤度の関係

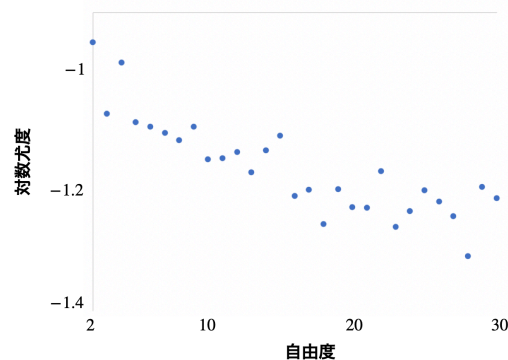


図 3: 自由度と尤度の関係

ティ変動モデルを提案した。動的潜在変数とハイパーパラメータの推定を行うために、粒子フィルタを応用したオンライン推定手法を開発した。提案モデルを米ドル/日本円の為替レートに適用することで、対応するボラティリティ変動を推定した。 $t$ -過程ボラティリティ変動モデルの自由度と観測データに対する対数尤度との関係から、提案モデルは先行研究で提案されているガウス過程ボラティリティ変動モデルに対して優位に推定可能であることを確認した。

今後の課題として、 $t$ -過程動的潜在変数モデルのロバスト性の定量的評価指標の作成や、変分推論を用いたハイパーパラメータ推定法の構築を検討している。

## 参考文献

- [1] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pp. 371–418. Springer, 1997.

- [2] ボラティリティ変動モデル. シリーズ現代金融工学 / 木島正明監修. 朝倉書店, 2000.
- [3] Blanka Horvath, Aitor Muguruza, and Mehdi Tomas. Deep learning volatility, 2019.
- [4] C.E. Rasmussen and C.K.I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Adaptive computation and machine learning series. University Press Group Limited, 2006.
- [5] Joan Gonzalvez, Edmond Lezmi, Thierry Roncalli, and Jiali Xu. Financial applications of gaussian processes and bayesian optimization, 2019.
- [6] Rajbir S Nirwan and Nils Bertschinger. Applications of gaussian process latent variable models in finance. In *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 1209–1221, 2019.
- [7] Amar Shah, Andrew Wilson, and Zoubin Ghahramani. Student-t processes as alternatives to gaussian processes. In *Artificial intelligence and statistics*, pp. 877–885, 2014.
- [8] 中川慧, 角屋貴則, 内山祐介. 金融時系列のための深層  $t$  過程回帰モデル. 第 21 回 人工知能学会 金融情報学研究会 (SIG-FIN), 2018.
- [9] Yusuke Uchiyama and Kei Nakagawa. Tplvm: Portfolio construction by student's t-process latent variable model. *Mathematics*, Vol. 8, No. 3, p. 449, 2020.
- [10] Timo Teräsvirta. An introduction to univariate garch models. In *Handbook of Financial time series*, pp. 17–42. Springer, 2009.
- [11] Amar Shah, Andrew Wilson, and Zoubin Ghahramani. Student-t processes as alternatives to gaussian processes. In *Artificial Intelligence and Statistics*, pp. 877–885, 2014.
- [12] Takekazu Kato. Introduction of particle filter and its implementation. *IPSJ SIG Technical Report*, Vol. 157, No. 22, p. 161, 2007.
- [13] Yue Wu, José Miguel Hernández-Lobato, and Zoubin Ghahramani. Gaussian process volatility model. In Z. Ghahramani, M. Welling, C. Cortes, N. D. Lawrence, and K. Q. Weinberger, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems 27*, pp. 1044–1052. Curran Associates, Inc., 2014.