

自発的に市場規模が定まる金融取引モデル

Self-organization of market sizing in financial transaction model

片平啓^{1*} 陳昱² 秋山英三¹
Kei Katahira¹ Yu Chen² Eizo Akiyama¹

¹ 筑波大学システム情報系

¹ Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba

² 東京大学大学院新領域創成科学研究科

² Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

Abstract: Various preceding market models can reproduce basic financial stylized facts such as volatility clustering, but most of those models require ad hoc tuning of parameters for the reproduction. Inspired by the idea of the sandpile model, we present a simple agent-based model of the financial market named Self-organized Speculation Game, where the number of traders is spontaneously tuned. While this model has high reproducibility of stylized facts, it holds similar behavioral properties to those of the sandpile model. The simulation results infer the possible contribution of self-organized criticality for the *spontaneous* emergence of stylized facts.

1 はじめに

金融資産における価格リターンの時系列データには、stylized facts と総称されるいくつかの定量・定性的な性質が存在する。たとえば、ボラティリティの大きい箇所が時間的にまとまって現れる、ボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる基本特性はよく知られている。Cont の報告 [1] によれば、ボラティリティ・クラスタリングを含め、少なくとも 11 個の統計性質が確認されている。

ボラティリティ・クラスタリングなどの基本的な stylized facts の創発メカニズムは、シンプルなエージェント・ベース・モデルを活用する経済物理学研究の進展により、大分明らかになってきている。最も支持されているメカニズムの 1 つが、少数派ゲーム [2] の派生市場モデル類を中心に議論された、他人の行動に同調する群衆行動である [3]。一方で、オーダーブックによる価格形成システムそのものも、ボラティリティのクラスター化に資することも、Maslov モデル [4] によって示されている。さらに片平・陳は、投機ゲーム [5] による最新の研究成果として、往復売買取引におけるホールド期間の多様性が、ボラティリティの増大に寄与するという新規メカニズムも提案している [6]。

しかしながら、基本的に自由放任主義の金融市場で、なぜ自然に stylized facts の出現にまで至るのか、その

自発性については、依然としてほとんど分かっていない。Stylized facts は、市場の種類やその歴史の長さ、制度の違いなどに依存せず、共通して観察される普遍的な現象である。たとえば、100 年以上の歴史を持つアメリカの成熟市場においても、高々 30 年程度の中国の新興市場においても、同様の特徴的性質が観測されている。よって、市場には何らかの自発的な調整原理が働いている可能性があり、モデルとして考えるならば、外部からの調整が必要なパラメータ数はごく少数に限られるはずである。しかし、ほとんどの先行市場モデルでは、stylized facts を再現するためには、シミュレーションの開始前に、人為的にすべてのパラメータの値を調整しなければならない。

この問題に対しては、stylized facts を臨界現象として捉えることが、1 つの有効なアプローチになるように思われる。Stylized facts の中には、価格リターンの累積分布やボラティリティの自己相関に冪乗則が見られる¹という基本特性も含まれる [1]。冪乗則と臨界現象には密接な関係があることから、経済物理学では、市場システムが臨界に近い状態にあるのではないかと考えられている [8]。

一方、物理学では、外部からの調整が無くても自然に臨界まで到達する、自己組織化臨界と呼ばれる原理が、砂山モデル [9] により提示されている。このモデルでは、毎時間ステップに 1 粒の砂が、ランダムに選ばれた $L \times L$ の格子上的 1 マスに落ちる。各マスには次

¹ ボラティリティの長期自己相関については、対数関数の方がフィッティングが良いという研究結果もある [7]。

*連絡先：筑波大学システム情報系
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
E-mail: k.katahira@akiyama-lab.net

第に砂が蓄積されていくが、閾値 4 に達すると山が崩れ、上下左右の隣接マスに砂が流れる。移動した砂によって山崩れが連鎖的に続発すると、大きな砂雪崩が起きる。なお、雪崩により砂が格子端まで達した場合には、その砂は落ちて消える。ルールはこのように単純であるが、砂山モデルのシステムは自発的に臨界へ至り、雪崩の規模とその頻度の中に冪乗則が現れる。

そこで、本研究では、stylized facts の自発性について調べるため、自己組織化臨界の原理を投機ゲーム [5] に導入し、一部のパラメータが自然に調整されるシンプルな金融市場のエージェント・ベース・モデルの構築を試みる。具体的には、stylized facts の再現能力を有しながら、市場に参加するプレイヤー数が時間発展的に調整される Self-organized Speculation Game (SOSG) を、砂山モデルの仕組みを参考にして構築する。

2 SOSG

SOSG は、少数派ゲーム [2] の仕組みを応用して考案した投機ゲームに、ゆっくりと 1 粒ずつ砂を落とす砂山モデル [9] の仕組みを取り入れ、市場規模が自発的に定まるように改良を施したモデルである。買いと売りを 1 セットとした単一ポジション²の往復取引や保有資本に基づいた複数注文、現実的世界と認知的世界の相互投影³といった投機ゲームの特徴的構造に変わりはないが、SOSG では、stylized facts を再現するために調整が必要なパラメータの数が 3 つに減っている。

ゲームの開始時、SOSG のゲーム市場には、誰もいない。毎時間ステップ t のはじめに、初期資本 $w_i(t) = 10B$ (B は定数) とランダムに決めた戦略 (後述) 1 つを与えられたプレイヤー i が 1 人参入する。

その後、ゲーム市場に参加している $N(t)$ 人それぞれが、買い (= 1) と売り (= -1) と待機 (= 0) の中から、行動 $a_i(t)$ として 1 つ選ぶ。プレイヤーが買い、または売り (空売りも可能) の注文を出す場合、注文量 $q_i(t)$ は、床関数 $\lfloor \dots \rfloor$ を用いて、次のように決める：

$$q_i(t) = \lfloor \frac{w_i(t)}{B} \rfloor. \quad (1)$$

取引単位量 B は、複数注文のしやすさを調整するパラメータである。ただし、往復取引の始めと終わりの注文量は同じとする。また、買い (売り) ポジションの保有時に買い増し (売り増し) はできない。

市場価格の変動 Δp は、買い注文と売り注文の需給関係で決まるとする。具体的には、次のように [10] の

注文不均衡式を適用する：

$$\Delta p = p(t) - p(t-1) = \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} a_j(t) q_j(t). \quad (2)$$

式 2 のような注文不均衡式を用いる場合、超過需要側の注文の約定を常に保証するため、十分な流動性を提供するマーケットメーカーの存在を暗黙に仮定している。

各プレイヤーは、行動の選択にあたり、離散価格変動 $h(t)$ の列により構成される 5 進数の履歴 $H(t)$ を参照する。離散価格変動 $h(t)$ は、 Δp から以下のように決める：

$$h(t) = \begin{cases} 2 \text{ (大きく上昇)} & \text{if } \Delta p > C, \\ 1 \text{ (上昇)} & \text{if } C \geq \Delta p > 0, \\ 0 \text{ (変化なし)} & \text{if } \Delta p = 0, \\ -1 \text{ (下落)} & \text{if } -C \leq \Delta p < 0, \\ -2 \text{ (大きく下落)} & \text{if } \Delta p < -C. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 C は認知閾と呼ぶパラメータであり、大きな価格変動とプレイヤーが認識する境界値を表す。式 3 より、履歴は、価格変動の方向の情報だけでなく、粗いながら、大きさの情報も有する。

実価格 $p(t)$ の変動とは別に、この履歴の情報の粗さを考慮して「プレイヤーが認知する価格変動」、つまり「認知価格 $P(t)$ 」の変動が次の式に従って起こるとする：

$$P(t) = P(t-1) + h(t). \quad (4)$$

ある往復取引がどの程度良いものだったのかは、取引前後の認知価格 $P(t)$ の変化に基づいて評価される。

記憶長 M のプレイヤーは、履歴から直近 M 時間ステップ分の変動パターンを読み取る。そして、自分の戦略に従い、その変動パターンに対応する推奨行動 $a_i(t)$ を選択する (表 1 を参照)。ただし、単一ポジションの往復取引を実現するため、取引の開始ポジションと同じ行動を戦略が推奨する場合には、代わりに待機を選択する。

反対売買により往復取引を終える際は、人間が情報を単純化して扱う様子を表現した認知的世界において、まず、認知的利得 $\Pi_i(t)$ ⁴ を算出する。プレイヤーがポジションを t_0 に開き、 t に閉じる場合、この往復取引における単位量あたりの認知的利得は、式 4 の認知価格を用いて、次のように求められる：

$$\begin{aligned} \Pi_i(t) &= a_i(t_0)(P(t) - P(t_0)) \\ &= a_i(t_0) \sum_{k=t_0+1}^t h(k). \end{aligned} \quad (5)$$

²両建てはできない。

³2 つの世界を行き来して進行する投機ゲームの枠組みについては、[5] の Fig.1 を参照。

⁴ $\Pi_i(t)$ は、投機ゲームにおける戦略利得 $\Delta G_i(t)$ と同義である。

表 1: $M = 3$ のときの戦略例.

履歴			推奨行動
-2	-2	-2	1
-2	-2	-1	0
-2	-2	0	0
-2	-2	1	-1
-2	-2	2	1
-2	-1	-2	0
	\vdots		\vdots
2	2	2	-1

さらに、認知的世界から現実的世界に戻って資本 $w_i(t)$ を更新するため、注文量 $q_i(t)$ を考慮して $\Pi_i(t)$ を単調増加な関数 f で変換し、資本調整 $\Delta w_i(t)$ を求める：

$$\begin{aligned} w_i(t) &= w_i(t_0) + \Delta w_i(t) \\ &= w_i(t_0) + f(\Pi_i(t)q_i(t_0)). \end{aligned} \quad (6)$$

本稿では、複雑化を避けるため、 $\Delta w_i(t) = \Pi_i(t)q_i(t_0)$ とする。また、資本更新の結果、 $w_i(t) < B$ となり、1 単位も注文できない状態に陥る場合には、そのプレイヤーはゲーム市場から退出する。

なお、式 6 の $\Delta w_i(t)$ は、市場価格 $p(t)$ から直接計算した場合の資本調整量と異なるが、この差は外部調整されるものとする。つまり、SOSG では、自分のすべての投資資本をプレイヤー自身で賄うというセルフファイナンスの仮定を置かない。

以上が SOSG の仕組みである。砂山モデルと改めて対比すると、1 人ずつ参入するプレイヤーが 1 粒ずつ落下する砂に、プレイヤーの参入先であるゲーム市場が砂粒の落下先である格子にそれぞれ対応している。また、本モデルの主要パラメータは、記憶長 M と取引単位量 B と認知閾 C の 3 つであるが、本研究のシミュレーションでは、 $M = 5$ と $C = 3$ に固定し、 B のみを変化させる。なお、市場価格 $p(t)$ の初期値は任意で構わないが、リターン $r(t) = \ln p(t) - \ln p(t-1)$ を計算するため、 $p(0) = 100 (\gg 1)$ とする。

3 結果・考察

はじめに、SOSG では、自発的に市場規模が定まり、かつ同時に、stylized facts も再現もされることを示す。図 1 の (a) と (b) は、 $B = 9$ としたときのゲーム市場に参加しているプレイヤー数、ならびに対応する市場価格のリターン $r(t)$ の時系列をそれぞれプロットしたものである。図 1 の (a) からは、シミュレーションのはじめに 700 人程度まで線形的に増加した後は、その

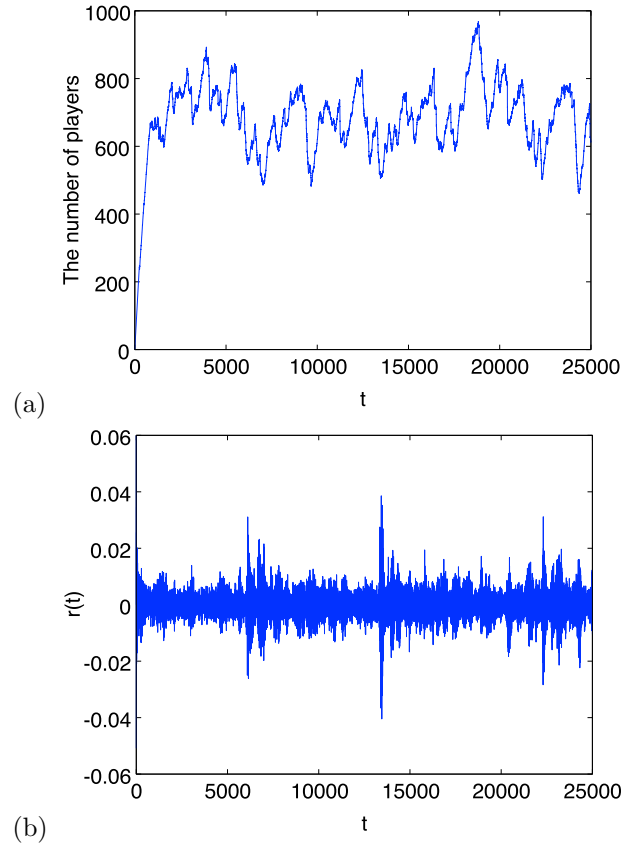
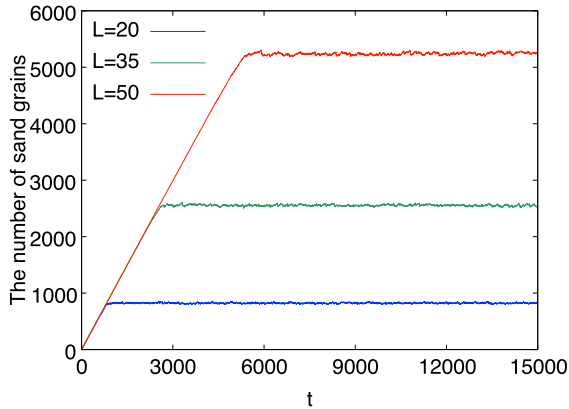


図 1: (a) ゲーム市場に残留するプレイヤー数と (b) 対応するリターンの推移 ($B = 9$).

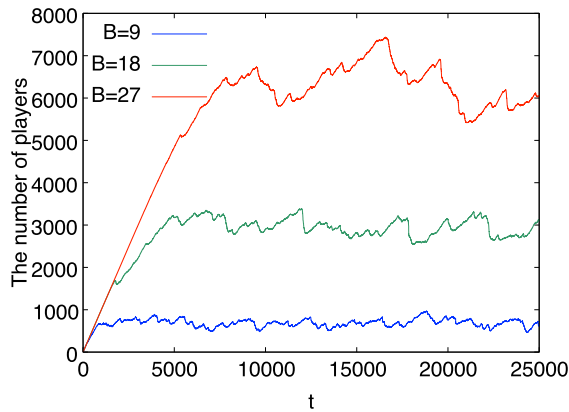
周辺値でプレイヤー数が揺らいでおり、時間の経過に伴って市場規模が自然に調整されている様子が見取れる。また、対応する図 1 の (b) の価格リターンにおいても、間欠的にボラティリティがまとまりながら増大しており、安定してボラティリティ・クラスタリングも創発していることが分かる。

なお、SOSG の stylized facts の再現能力は、元の投機ゲーム [5] と同じであり、同一のパラメータ下において、10 個の stylized facts を再現することができる。また、[6] で明らかにした、ボラティリティ・クラスタリングの創発メカニズムや各パラメータの効果についても、SOSG では維持されている。さらに、投機家以外の影響を考慮して、価格変動に摂動を加えた場合のシミュレーション結果も、SOSG は [11] と同様である。

続いて、砂山モデルと SOSG の振る舞いの類似性を示す。まず、双方のモデルとも、最終的なシステムサイズが 1 つのパラメータによって大きく決定づけられ、系の調整に必要な時間もその大きさと正に相関するという特徴がある。砂山モデルでは、図 2 の (a) に示すように、格子内に残っている砂の総量が、格子の 1 辺の長さ L に強く依存する。 L が大きいほど、残存する砂粒の数が増え、値が安定するまでにより多くの時間



(a)



(b)

図 2: (a) L を変えたときの砂山モデルの格子に残存する砂の量と (b) B を変えたときの SOSG のゲーム市場に残留するプレーヤー数の推移。

を要する。SOSG においても同様に、ゲーム市場内に留まるプレーヤーの数が、取引単位量 B に強く依存する。図 2 の (b) に示すように、 B が大きくなるほど、市場規模が拡大し、収束までの時間も長くなる。ただし、一度に格子から流出する砂の量よりも、一度にゲーム市場から退出するプレーヤーの数の方が相対的に多いため、安定状態における揺らぎは、砂山モデルよりも SOSG の方が少し大きい。

加えて、砂山モデルにおける雪崩の規模と頻度の関係のように、SOSG でも価格リターンの累積分布に冪乗則が観察される。図 3 の青線は、52,000 時間ステップ (内 2,000 時間ステップは移行期間) のシミュレーションを 20 回行ってプロットした $B = 9$ ときの正の $r(t)$ の累積分布である。この図は、Clauset らが考案した冪乗則の頑健な検定方法 [12] を取り入れた Python パッケージ [13] によって作成している。赤の点線は、推定されたテールインデックス $\alpha = 4.56$ の冪分布関数であり、青線の累積分布に対し、推定された緑の点線の指数分布関数よりもフィッティングが良いことが分かる。また、Clauset ら提案の p 値による定量的判定においても $p = 4.05 \times 10^{-4} (< 0.1)$ となって有意であり、

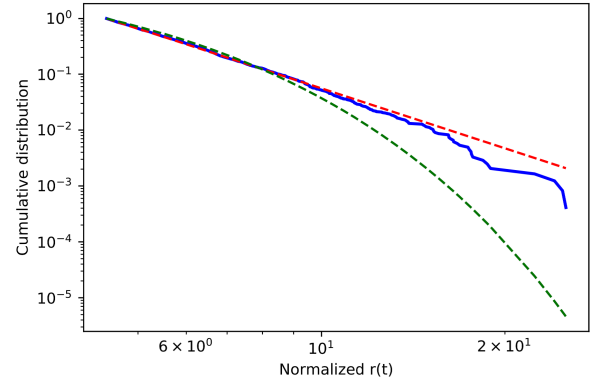


図 3: $B = 9$ のときのリターン (20 試行回から生成した 500,195 個の正のデータ) の累積分布。

冪分布の方が真の分布に近いと結論付けられる。

このように、システムサイズの調整の様子や冪乗則の出現において、SOSG は砂山モデルと類似しており、自己組織化臨界の原理が SOSG でもうまく機能していると考えられる。また、それでありながら、図 1 の (b) でも示したように、SOSG は、金融市場のモデルとして、ボラティリティ・クラスタリングなどの stylized facts を再現することが可能である。これらの結果は、自己組織化臨界の働きによって、stylized facts が自然に発生している可能性を示している。

4 むすび

本研究では、投機ゲームに自己組織化臨界の原理を取り入れることで、プレーヤー数の人為的な制御を必要としないシンプルな金融市場のエージェント・ベース・モデル「SOSG」を構築した。主要パラメータの数が減っているのにも関わらず、SOSG は、投機ゲームと同水準の stylized facts の再現能力を維持している。したがって、SOSG は、投機ゲームをスリムにしたより本質的なモデルであると言えよう。また、SOSG は、参考にした砂山モデルと共通する性質を持っており、市場規模が自己調整されたり、価格リターンに冪乗則が現れたりする。このような SOSG のシミュレーション結果は、現実市場における stylized facts の自発的創発に関して、自己組織化臨界のメカニズムの存在や寄与の可能性を示唆するものと考えられる。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP17J09156, JP20J00107 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues.
- [2] Challet, D., & Zhang, Y. C. (1997). Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 246(3-4), 407-418.
- [3] Challet, D., Marsili, M., & Zhang, Y. C. (2001). Stylized facts of financial markets and market crashes in minority games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 294(3-4), 514-524.
- [4] Maslov, S. (2000). Simple model of a limit order-driven market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 278(3-4), 571-578.
- [5] Katahira, K., Chen, Y., Hashimoto, G., & Okuda, H. (2019). Development of an agent-based speculation game for higher reproducibility of financial stylized facts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 524, 503-518.
- [6] Katahira, K., & Chen, Y. Heterogeneous Round-trip Trading and the Emergence of Volatility Clustering in Speculation Game, *Journal of Systems Science and Complexity* (under review).
- [7] Zumbach, G. O. (2007). The riskmetrics 2006 methodology. Available at SSRN 1420185.
- [8] Mantegna, R. N., & Stanley, H. E. (1999). *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press.
- [9] Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Physical review letters*, 59(4), 381.
- [10] Bouchaud, J. P., & Cont, R. (2000). Herd behaviour and aggregate fluctuations in financial market. *Macroeconomic Dynamics*, 2, 170-196.
- [11] Katahira, K., & Chen, Y. (2020). An extended Speculation Game for the recovery of Hurst exponent of financial time series. *New Mathematics and Natural Computation*, 16(02), 319-325.
- [12] Clauset, A., Shalizi, C. R., & Newman, M. E. (2009). Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4), 661-703.
- [13] Alstott, J., Bullmore, E., & Plenz, D. (2014). powerlaw: a Python package for analysis of heavy-tailed distributions. *PloS one*, 9(1), e85777.